

Die

Festigkeitslehre

und ihre Anwendung.

Zum Gebrauch in der Praxis und für Studirende

leicht verständlich bearbeitet

von

P. Uhlich,
Maschinen-Ingenieur.

**Mit sorgfältig gewählten Beispielen
und 126 in den Text gedruckten Figuren.**

Mittweida 1885.
Selbstverlag des Verfassers.

Vorwort.

Die überaus schätzbaren Werke der Meister im Wissenszweige der Festigkeitslehre sind so hoch theoretisch und weit umfassend, dass oft der Studirende und der im praktischen Leben stehende Techniker vor dem Studium der Werke zurückschreckt oder wenigstens grosse Schwierigkeiten findet. Andere Werke sind allzu knapp oder ihr Stoff ist beschränkt und das Verständniss mitunter schwierig wegen der auf bestimmte Leserkreise berechneten ausschliesslichen Anwendung der niederen Mathematik. Der Inhalt anderer wieder bezieht sich vorwiegend auf das Baufach, so dass ein Buch willkommen sein muss, welches bezüglich der höheren Mathematik nur mit Voraussetzung der Kenntniss der einfachen Differentiationen und Integrationen, in knapper, leicht verständlicher Weise die Herleitungen der meisten, auch der besonders im Maschinenbau nöthigen Resultate giebt.

In vorliegendem Buche habe ich mich bemüht, diesen Bedingungen, soweit möglich, zu entsprechen mit Verwerthung meiner diesbezüglichen Erfahrungen in der Praxis und im Lehrfache. Ich habe das, was für den gewöhnlichen Bedarf als überflüssig gelten kann, vermieden und das Nöthige zum Verständniss ausführlich genug behandelt und an zahlreichen praktischen Beispielen die Anwendung gezeigt.

Ich hoffe, dass der Studirende in diesem Buche Unterstützung für sein Studium, der ausführende Techniker ein übersichtliches Hülfsmittel zur verständnissvollen Anwendung

der Festigkeitslehre und, wo nöthig, eine Ergänzung entstandener Lücken, oder ein Mittel zum Selbstunterricht finden wird.

Als Richtschnur hat mir vor anderen im Text erwähnten Werken das mustergültige Werk: „Die Maschinenelemente" von C. Bach, Verlag von Cotta, Stuttgart 1881, vorgelegen.

Etwaige sachgemässe Berichtigungen und Winke zur Vervollkommnung werde ich stets mit Dank entgegen nehmen.

P. Uhlich.

Berichtigungen.

Seite 42, Figur steht verkehrt.
„ 85, Zeile 2 von oben liess „zwar" statt „zw."
„ 91, „ 18 von oben liess „vernachlässigt" statt „vernachässigt."
„ 95, „ 2 von unten liess „zusammen" statt „zummen".

Ergänzung. Im Beispiel Seite 127 ist bei der Berechnung der Reactionen Centimetermaass eingeführt, während die Maasse in der Figur in Millimetermaass eingeschrieben sind.

Inhaltsverzeichniss.

IV. Abschnitt.

V. Abschnitt.

VI. Abschnitt.

Seite

VII. Abschnitt.

VIII. Abschnitt.

Einleitung.

Die Festigkeit ist eine rein physikalische Eigenschaft der Körper, bedingt durch die molekulare Zusammensetzung derselben. Die Anziehungskraft zwischen den einzelnen Molekülen setzt den an dem Körper angreifenden äusseren Kräften einen Widerstand entgegen und je nach der Grösse der äusseren Kräfte findet eine Formänderung statt, die eine vorübergehende oder eine bleibende ist, oder der Zusammenhang der Moleküle wird ganz aufgehoben, der Körper wird zerstört.

Die Eigenschaft der Körper, unter der Einwirkung äusserer Kräfte eine Formänderung zu erleiden, die nach dem Verschwinden der äusseren Kräfte ebenfalls verschwindet, nennt man Elasticität.

Soweit also die Kräfte die Grenze nicht überschreiten oder nicht erreichen sollen, bei der die Elasticität überwunden wird, kann man die Lehre von den Beziehungen zwischen den Kräften einerseits, den Dimensionen, dem Material und der Formänderung andrerseits auch Elasticitätslehre nennen.

Die Grösse der Formänderung, bei der dieselbe beginnt bleibend zu werden, nennt man die Elasticitätsgrenze.

Die Grösse der Kraft oder Belastung pro Flächeneinheit, bei der die Elasticitätsgrenze eines Körpers von bestimmtem Material erreicht wird, werde der Tragmodul des Materials genannt und mit T bezeichnet.

Die Grösse der Kraft oder Belastung pro Flächeneinheit eines Körperquerschnittes, bei der der Zusammenhang des Körpers zerstört wird, nennt man den Bruchmodul des Materials und bezeichnet ihn fast allgemein mit K.

Jeder Einwirkung von äusseren Kräften auf einen Körper setzen sich innere Kräfte entgegen, die man Spannungen nennt und die ihrem Sinne nach positive Spannungen oder negative Spannungen sein können.

Zugspannungen bezeichnet man mit (+) positiv, Druckspannungen mit (—) negativ. Wenn die Grösse dieser Spannungen pro Flächeneinheit eines Körperquerschnittes die Grösse des Tragmodul T erreicht, so ist die Elasticitätsgrenze erreicht, der Körper nimmt bleibende Formänderung an, und wenn sie die Grösse des Bruchmodul K erreicht, so wird der Zusammenhang des Körpers in dem fraglichen Querschnitt zerstört.

Die Spannung pro Flächeneinheit eines Körperquerschnittes (Schnittebene senkrecht zur Axe) sei allgemein mit σ (sigma) bezeichnet, wenn sie senkrecht zum Querschnitt gerichtet ist. Sie kann dann Normalspannung genannt werden.

Die Spannung pro Flächeneinheit eines Körperquerschnittes sei allgemein mit τ (tau) bezeichnet, wenn ihre Richtung in den Querschnitt selbst fällt. Sie kann dann Tangentialspannung oder Schubspannung genannt werden.

Damit nun die für die Praxis nöthige Sicherheit vorhanden ist, dafür, dass der Körper weder zerstört, noch dass die Elasticitätsgrenze überschritten wird, dürfen die Spannungen σ und τ pro Flächeneinheit des Körperquerschnittes eine Grösse nicht überschreiten, die je nach dem verlangten und üblichen Sicherheitsgrad ein grösserer oder kleinerer Bruchtheil der Grössen von T und K ist.

Die zulässige Grösse der Normalspannung σ sei mit k bezeichnet.

Die zulässige Grösse der Schubspannung τ sei mit kt bezeichnet.

Die Grösse der Spannung oder Belastung k oder kt pro Flächeneinheit des Querschnittes eines Körpers von bestimmtem Material nennt man

die zulässige Beanspruchung des Materials oder des Körpers.

Während der Tragmodul T und der Bruchmodul K für bestimmtes Material einen bestimmten für Zug, Druck, Schub und Biegung mehr oder weniger verschiednen, durch Versuche festgestellten Werth haben, sind die Werthe von k und kt mehr willkürlich nach dem gewünschten Sicherheitsgrad $\frac{K}{k}$ und anderen, der eigentlichen Festigkeitslehre fern liegenden Umstände anzunehmen.

Der Kostenpunkt, die Nothwendigkeit geringen Gewichtes, stetige oder längere Zeit unterbrochene Belastung u. a. m. kommt dabei in Frage.

Vor allem ist aber zu berücksichtigen, ob die Belastung eine ruhende, oder ob sie eine der Grösse oder der Richtung nach wechselnde oder eine beständig wiederholte und mit Stössen verknüpfte ist.

Die durch die Versuche von Wöhler bestätigte Erfahrung hat gezeigt, dass die zur Aufhebung der Festigkeit eines Körpers nöthige Kraft bei wechselnder Beanspruchung kleiner ist als bei ruhender.

Die Versuche haben gezeigt, dass und in welchem Maasse die Festigkeit des Materials kleiner wird mit der Vergrösserung der Zahl der wiederholten Beanspruchungen und mit der Vergrösserung der Differenz der hierbei auftretenden Grenzspannungen. Die Versuchsresultate haben zur Aufstellung von Formeln für die sogen. Arbeitsfestigkeit geführt.

Es ist z. B. für Schmiedeeisen die Arbeitsfestigkeit

$$A = 0{,}55\,K + 0{,}45\,C \quad \text{und} \quad A = 0{,}64\,K + 0{,}36\,C$$

für Zug — für Druck

d. h. es wird bei beliebig gesteigerter Zahl der Beanspruchungen kein Bruch eintreten, wenn die Beanspruchung pro Flächeneinheit $\leqq A$ ist. Hierbei ist K der Bruchmodul bei ruhender Belastung, C die bei der wechselnden Beanspruchung auftretende Minimalspannung, die grösser, gleich oder kleiner als Null sein kann.

Für die praktische Anwendung ist dann die zulässige Beanspruchung ein Bruchtheil von A, entsprechend der gewünschten oder üblichen Sicherheit.

Die folgende Tabelle der Festigkeits- und Elasticitätscoefficienten giebt die Werthe der zulässigen Beanspruchung an, wie diese nach der umstehenden, zum grössten Theil aus „Bach, Maschinenelemente“ entnommenen Tabelle und nach Vergleichungen mit Ausführungen in der Praxis im Mittel angenommen werden können.

Tabelle der Elasticitäts-
in Kilogramm

Material	Elasticitätsmodul E	Schub-Elasticitätsmodul G	Bruchmodul K für ruhende Belastung				Trag-Elastici-täts-	
			Zug	Druck	Biegung	Schub	Zug	Druck
Schmiedeeisen in Stäben . .	2000000	800000	3800	3800	5000	3500	1400	1400
Eisenblech = *)	2000000	800000	3000	—	—	2400	—	—
„ „ ⊥ .	—	—	2700	—	—	—	—	—
Bessemerstahl .	2150000	860000	5500	—	8000	4000	3000	3000
Gussstahl . .	2150000	860000	7500	—	—	—	—	—
Federgussstahl gehärtet . .	2150000	860000	—	—	—	—	—	—
Gusseisen . .	1000000	400000	1250	7500	2550	1500	750	1500
Phosphorbronze	950000	380000	4000	—	—	—	1300	—
Bronze . . .	700000	280000	2000	—	—	—	385	—
Kupferblech gehämmert . .	1110000	440000	—	—	—	—	1400	1400
Eiche, Buche, Esche . . .	120000	—	950	480	720	70	270	120
Kiefer, Fichte, Tanne . . .	110000	—	800	400	600	50	270	120
Granit, Syenit, Diorit . . .	120—500	—	30—60	800—1600	130—260	60—120	—	—
Sandstein . .	45—370	—	8—30	200— 800	30—130	15— 60	—	—
Ziegel . . .	—	—	5— 7	120— 200	9— 15	20— 30	—	—

Wenn es die dadurch vergrösserte Formänderung zulässt, kann bei vorzügl. Schmiedeeisen die zulässige Beanspruchung unter *a* um ca. 20 % erhöht werden. Sehr häufig werden die Werthe von *k*

Es gelten die zulässigen Beanspruchungen

unter a, wenn die Belastung eine ruhende ist,

unter b, wenn die Beanspruchung eine wechselnde ist derart, dass die hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von Null bis zu einem Maximum wachsen und dann wieder bis auf Null zurückgehen. (wiederholte Biegung, Dehnung und Drehung nach einer Richtung hin),

*) = bedeutet: parallel zur Walzrichtung.
⊥ „ senkrecht „ „

und Festigkeitscoefficienten
pro Quadratcentimeter.

modul T grenze		zulässige Beanspruchung k resp. kt													
		Zug			Druck		Biegung			Schub			Drehung		
Biegung	Drehung	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c
—	—	900	600	300	900	600	900	600	300	720	480	240	360	240	120
—	—	900	600	300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	720	480	240	—	—	—
3000	1450	1350	900	450	1350	900	1350	900	450	1080	720	360	540	360	180
—	1450	1500	1000	500	1500	1000	1500	1000	500	1200	800	400	600	400	200
—	—	—	—	—	—	—	—	4300	—	—	—	—	—	—	—
800	—	300	200	100	900	600	450	300	150	—	160	—	150	100	50
—	—	750	500	250	—	—	750	500	250	—	—	—	300	200	100
—	—	300	200	100	--	—	300	200	100	—	—	—	—	—	—
—	—	900	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	120	66	—	—	—	120	66	—	—	—	—	—	—	—
								mittlere Werthe							
—	—	80	60	—	—	—	80	60	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	40—60	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	16—32	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	7—10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

und kt bei Schmiedeeisen, Stahl und Gusseisen einer grösseren Sicherheit wegen und aus anderen Rücksichten bis zu 20 % und mehr kleiner angenommen.

---

unter c, wenn die Beanspruchung eine wechselnde ist derart, dass die dadurch hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von einem grössten negativen Werth stetig wachsen bis zu einem grössten positiven in absoluter Beziehung gleichgrossen Werth, dann wieder abnehmen u. s. w. (wiederholte Biegung oder Drehung nach entgegengesetzter Richtung u. s. w.).

Für zwischenliegende Beanspruchungen können dazwischenliegende Werthe angenommen werden.

Beim Auftreten von Stössen in den Constructionstheilen ist die zulässige Beanspruchung kleiner anzunehmen.

Je nach der Art und Weise, wie die resultirende Mittelkraft aller äusseren Kräfte auf einen Körper einwirkt, muss man folgende Fälle unterscheiden:

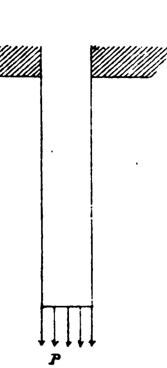
Zug- und Druckfestigkeit,
Schub- oder Scheerfestigkeit,
Biegungsfestigkeit,
Drehungs- oder Torsionsfestigkeit,
Zusammengesetzte Festigkeit,
Knickungsfestigkeit.

Von diesen sollen zunächst die ersteren 4 einfachen Fälle behandelt werden und zwar immer in Bezug auf den geraden stabförmigen Körper, dessen Mittellinie im unbelasteten Zustande eine gerade Linie ist und dessen Material überall die gleiche Beschaffenheit hat. Die Behandlung der krummen Körper, die man oft mit genügender Genauigkeit als gerade berechnen kann, erfordert complicirtere Untersuchungen und liegt ausser dem Bereich unsres Zieles.

I. Abschnitt.

Zug- und Druckfestigkeit.

a. Ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes.



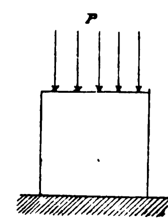
An einem prismatischen Körper wirkt, über der Querschnittsfläche gleichmässig vertheilt, die Zugkraft P. Drückt man die Grösse der Querschnittsfläche durch die Flächeneinheit, etwa durch Quadratmillimeter oder durch Quadratcentimeter aus, so kommt auf diese Flächeneinheit ein bestimmter Theil der Kraft.

Ist F qmm die Grösse des Querschnittes, so ist offenbar der Theil, der von der Kraft auf 1 qmm kommt, gleich $\frac{P}{F}$.

Dieser äusseren Kraft pro qmm setzt sich eine gleichgrosse innere Spannung entgegen, die senkrecht zum Querschnitt gerichtet, die also eine Normalspannung σ ist.

Die Summe dieser Spannungen σ, die ausgedrückt ist durch $F. \sigma$, muss gleich sein der ganzen Kraft P, also ist

$$P = F\sigma, \quad \sigma = \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$



Ist der Körper durch die Kraft P gedrückt, P also nicht Zug, sondern Druck, so ist σ nach früherer Annahme negativ und

$$P = -F\sigma, \quad \sigma = -\frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

d. h. σ ist die Druckspannung.

Verlängerung oder Verkürzung eines durch Zug oder Druck belasteten Stabes, ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes.

Ist die Länge des Stabes l, die Kraft P (Zug oder Druck), so ist die Verlängerung oder Verkürzung erfahrungsgemäss umso grösser, je grösser l und je grösser P ist, also direct proportional mit l und P. Sie ist umso kleiner, je grösser der Querschnitt F (als Vielfaches der Flächeneinheit) und je widerstandsfähiger das Material ist, also ist die Verlängerung oder Verkürzung, die mit Δl (delta l) bezeichnet sei, umgekehrt proportional der Querschnittsfläche F und einem Faktor α (alpha), der vom Material abhängig ist. Auf Grund dieser Erfahrungssätze lässt sich ohne Weiteres die Formel aufstellen:

$$\Delta l = \frac{P \,.\, l}{F \,.\, \alpha}$$

α ist näher zu bestimmen.

Ist die Länge des Stabes l, der Querschnitt 1 und nimmt man die Längenänderung gleich l an, so ist nach Obigem

$$l = \frac{P \,.\, l}{1 \,.\, \alpha}, \text{ daraus}$$

$$\alpha = P.$$

Die Kraft, die nöthig ist, um einen Stab vom Querschnitt 1 um seine eigene Länge zu dehnen, nennt man den Elasticitätsmodul und bezeichnet diesen mit E.

Es ist demnach $\alpha = E$ und die Verlängerung oder Verkürzung

$$\Delta l = \frac{P\,l}{F\,E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Der Begriff: Elasticitätsmodul und dessen Grösse ist nur ideell, da bei Stäben von fast allen Materialien bei der Verlängerung um die eigene Länge die Elasticitätsgrenze überschritten werden würde.

Die Bestimmung von E kann geschehen mit Hülfe der aus obiger Gleichung direct hervorgehenden Gleichung

$$E = \frac{P\,l}{F\,\Delta l},$$

wenn man Δl durch Versuche misst.

Aus Gl. 2 folgt

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{F\,E}.$$

Setzt man hierin $l = 1$ und $F = 1$, so ist P gleich der Spannung σ pro Flächeneinheit. Wenn man das Verhältniss der

Verlängerung Δl zur ganzen Länge 1 mit ε (epsilon) bezeichnet, so ist ε die Dehnung des Stabes von der Länge 1 und dem Querschnitt 1 und werde specifische Dehnung genannt:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\text{und } \sigma = E\,\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Bestimmung der Tragfähigkeit.

Nach den Gleichungen Nr. 1 ist

$$\sigma = \pm \frac{P}{F},$$

wobei das negative Vorzeichen einfach Druck bedeutet, mit Beibehaltung des Begriffes also weggelassen werden kann.

Für praktische Anwendung darf die Spannung σ den zulässigen Werth k nicht überschreiten, also kann man direct setzen die zulässige Beanspruchung

$$k = \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Grösse der Kraft P, welche die Tragfähigkeit genannt wird, ist

$$P = F\,k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Querschnittsfläche bei gegebener Zug- oder Druckkraft P

$$F = \frac{P}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Beispiel 1.

In der Zugstange eines belasteten Krahnes wirkt eine Zugkraft von 8000 ^{kg}. Es soll der Durchmesser der schmiedeeisernen Stange von rundem Querschnitt berechnet werden.

Nach Gl. 7 ist $F = \frac{P}{k}$.

Bei dem Werthe $k = 7\,^{kg}$ pro qmm hat man eine Sicherheit gegen Zerreissen:

$$\frac{K}{k} = \frac{3800}{700} \sim 5{,}5.$$

Nun ist, wenn d der Durchmesser der Stange,

$$\frac{d^2\,\pi}{4} = \frac{8000}{7},$$

$$d = \sqrt{\frac{4\,.\,8000}{\pi\,.\,7}} = \sqrt{1454{,}5} \sim 38 \text{ mm}.$$

Der auftretenden Stösse und Spannungswechsel wegen nimmt man in diesem Fall die zulässige Beanspruchung gewöhnlich viel kleiner an.

Wie gross wird dieselbe, wenn die runde Stange durch zwei Flacheisenstangen von 60 mm Höhe und 20 mm Dicke ersetzt wird?

Es ist $$k = \frac{P}{F} = \frac{8000}{60 \cdot 20 \cdot 2} = 3{,}33^{kg}.$$

Wie gross ist die Verlängerung der runden Stange, wenn dieselbe 2 m lang ist?

Nach Gl. 2 ist $\Delta l = \frac{P\,l}{F\,E}$.

Der Elasticitätsmodul für Schmiedeeisen ist 20 000 ^{kg} pro qmm.

$$\Delta l = \frac{8000 \cdot 2000}{38^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20\,000} = \frac{1600}{1444 \cdot 9785 \cdot 2} = 0{,}706 \text{ mm}.$$

Beispiel 2.

Ein eiserner Träger, dessen Breite 200 mm, ist mit dem einen Ende auf Mauerwerk gelagert, auf das er mit 5000 ^{kg} drückt. Wie lang muss der Träger aufliegen, wenn die zulässige Beanspruchung für Ziegelmauerwerk 9 ^{kg} pro qcm angenommen wird.

Es ist $F = \frac{P}{k}$ und mit l als Länge des Auflagers:

$$20\ l = \frac{5000}{9}$$

$$l = \frac{5000}{9 \cdot 20} = 27{,}7 \text{ cm}.$$

Beispiel 3.

Der Querschnitt einer zum Durchmesser verhältnissmässig kurzen gusseisernen Säule ist ringförmig. Der äussere Durchmesser ist 20 cm, der innere 16 cm.

Welche Last vermag die Säule mit der nöthigen Sicherheit zu tragen?

Nach Gl. 6 ist $P = F\,k$.

Gusseisen kann auf Druck in diesem Fall bei ruhender Belastung mit 800 ^{kg} pro qcm beansprucht werden.

$$P = (20^2 - 16^2)\frac{\pi}{4} \cdot 800 = 144 \cdot 0{,}785 \cdot 800 = 90432^{kg}.$$

Bei welcher Last würde die Säule zerdrückt werden?

Die Festigkeit des Gusseisens gegen Druck ist im Mittel 7500.

$$P = F\,K = 144 \cdot 0{,}785 \cdot 7500 = 847\,800^{kg}.$$

Beispiel 4.

Für eine mit P belastete Kette, mit der üblichen ovalen Form der Glieder, ist eine Formel zur Berechnung des Ketteneisendurchmessers δ aufzustellen.

Es tritt in dem Kettengliede ausser Zug auch Biegungsbeanspruchung auf und eine streng richtige Behandlung würde complicirte Untersuchungen über den krummen Träger voraussetzen. Man kann sich dadurch helfen, dass man die Kette nur auf Zug berechnet und die Vermehrung der Spannung durch die Biegung durch verhältnissmässig kleinen Werth von k berücksichtigt.

Diesen Werth von k erhält man am besten, wenn man ihn aus den Dimensionen guter ausgeführter Ketten mit Zuhülfenahme der Tabellen von Kettenfabriken berechnet. Bei bekannter Tragfähigkeit P und bekanntem Ketteneisendurchmesser δ ist $k = \frac{P}{2\,\delta^2 \frac{\pi}{4}}$.

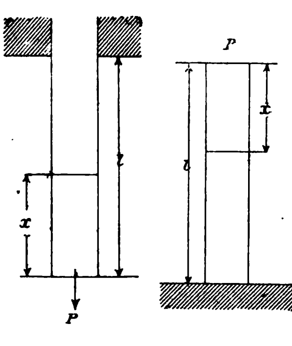
Es ergiebt sich der Durchschnittswerth $k = 6{,}6^{kg}$ pro qmm.

Nun ist also nach der Gleichung $F = \frac{P}{k}$:

$$2\,\delta^2 \frac{\pi}{4} = \frac{P}{6{,}6}, \text{ daraus } \delta = \sqrt{\frac{P\,.\,4}{2\,\pi\,.\,6{,}6}} = 0{,}31\ \sqrt{P}.$$

b. Zug- und Druckfestigkeit mit Berücksichtigung des Eigengewichtes.

Bei grösserem Volumen eines vertikalen stabförmigen Körpers kann das Eigengewicht wesentlich die Querschnittsdimensionen beeinflussen.



Alle auf einanderfolgende Querschnitte erfahren eine verschieden grosse Beanspruchung. Beim gedrückten Stab ist der unterste, beim gezogenen der oberste Querschnitt am meisten beansprucht.

Ist F der Querschnitt, l die Länge, G das Gewicht des Stabes, s das specifische Gewicht des Materials, P die am Stab wirkende Zug- oder Druckkraft, so ist die Spannung in dem meist belasteten Querschnitt pro Flächeneinheit:

$$\sigma = \frac{P + G}{F}$$

und die in der Praxis zulässige Beanspruchung

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{P + G}{F} \\ \text{oder } k &= \frac{P + F s l}{F} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Die Tragfähigkeit

$$P = F k - F s l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Querschnittsgrösse

$$F = \frac{P}{k - s l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Das specifische Gewicht ist das Gewicht von 1 cdm des Körpers, es muss demzufolge die Maasseinheit von l und F gleich 1 dcm und 1 qdcm sein.

Querschnitte von gleicher Zug- oder Druckfestigkeit.

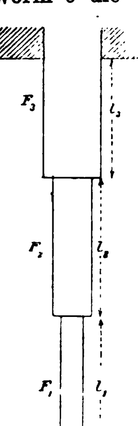
P ist in jedem Querschnitt constant, das Gewicht nimmt aber von Null bis zu einem Maximum, gleich dem ganzen Körpergewicht, zu, und es ist in einem beliebigem Querschnitt in der Entfernung x vom freien Ende die Spannung

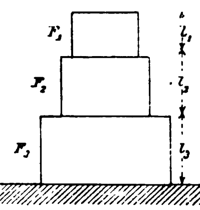
$$\sigma = \frac{P + F s x}{F}.$$

Wenn diese Spannung in jedem Querschnitte constant gleich der zulässigen Beanspruchung sein soll, zum Zwecke einer Gewichts- und Materialersparniss, so müssen die Querschnitte von der Befestigungsstelle bis zum freien Ende abnehmen nach der Gleichung

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{s x}{k}},$$

worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= 2{,}718$ ist.





Die Herleitung der Gleichung, die in der Praxis keine Anwendung findet, soll hier übergangen werden. Man ersetzt die allmälige Querschnittsänderung bei der Anwendung (Schachtgestänge, Brückenpfeiler) dadurch, dass man einzelne prismatische Theile auf oder unter einander setzt.

Besteht z. B. ein Gestänge oder ein Pfeiler aus 3 Theilen, deren Längen l_1 l_2 l_3 mit den Querschnitten F_1 F_2 F_3 und ist P die Belastung der ganzen Construction, so ist

für den ersten Theil: $F_1\,k = P + F_1\,s\,l_1$,
für den zweiten Theil: $F_2\,k = P + F_1\,s\,l_1 + F_2\,s\,l_2$,
für den dritten Theil: $F_3\,k = P + F_1\,s\,l_1 + F_2\,s\,l_2 + F_3\,s\,l_3$.

Aus der ersten Gleichung folgt $F_1 = \frac{P}{k - l_1\,s}$.

Mit Einsetzung dieses Werthes in die zweite Gleichung folgt

$$F_2\,k = P + \frac{P\,l_1\,s}{k - l_1\,s} + F_2\,l_2\,s$$

woraus $F_2 = \frac{P\,k}{(k - l_1\,s)\,(k - l_2\,s)}$, ebenso erhält man mit Einsetzung dieses Werthes in die dritte Gleichung:

$$F_3 = \frac{P\,k^2}{(k - l_1\,s)\,(k - l_2\,s)\,(k - l_3\,s)}.$$

Allgemein folgt für den $n$ten Stab:

$$F_n = \frac{P\,k^{n-1}}{(k - l_1\,s)\,(k - l_2\,s)\,\ldots\ldots\,(k - l_n\,s)} \quad \ldots \quad (11)$$

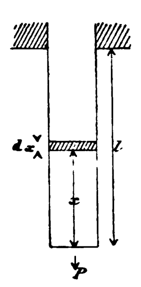
Sind die Längen $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_n$ gleich gross, so wird

$$F_1 = \frac{P}{k}\,\frac{k}{k - l\,s}, \quad F_2 = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - l\,s}\right)^2$$

und allgemein für den $n$ten Stab

$$F_n = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - s\,l}\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Berechnung der Längenänderung eines gezogenen oder gedrückten Stabes mit Berücksichtigung des Eigengewichtes.



Ist G das Gewicht des ganzen Stabes, so ist, ohne Rücksicht auf die Kraft P, die an dem Stabelement von der unendlich kleinen Länge dx angreifende Kraft gleich $G\,\frac{x}{l}$.

Die Verlängerung des Elementes ist $d\Delta l$ und es ist entsprechend der Gleichung

$$\Delta l = \frac{P\,l}{F\,E},$$

mit $P = G\,\frac{x}{l}$ und $l = dx$:

$$d\Delta l = \frac{G x\,dx}{l\,F\,E}.$$

Die Verlängerung des Stückes x ist die Summe oder das Integral davon:

$$\int_0^x \frac{Gx\,dx}{l\,F\,E} = \frac{G}{l\,F\,E} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Setzt man darin $x = l$, so folgt die Verlängerung des Stabes von der Länge l:

$$\frac{G}{l\,F\,E} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{\frac{G}{2}\,l}{F\,E}.$$

Dazu kommt noch die Verlängerung $\frac{P\,l}{F\,E}$ durch die Kraft P, so dass man für die Gesammtausdehnung erhält:

$$\Delta l = \left(P + \frac{G}{2}\right)\frac{l}{E\,F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13.$$

Wirken P und G als Druck, so ist Δl Verkürzung.

Beispiel 1. Wie lang muss ein hängender Stab von Gusseisen mit quadratischem Querschnitt sein, damit er durch sein eigenes Gewicht zerreisst.

Ist b die Seitenlänge in Decimeter, s das specifische Gewicht $= 7{,}1$, l dcm die Länge des Stabes, so ist für den meistbelasteten Querschnitt, wenn G das Gewicht des Stabes:

$$G = FK \text{ oder } b^2 \,.\, l \,.\, 7{,}1 = b^2\,K, \text{ daraus}$$

$$l = \frac{K}{7{,}1}.$$

Der Bruchmodul des Gusseisens für Zug ist 1250 kg pro qcm, demnach pro Quadratdecimeter 125 000 kg, also

$$l = \frac{125\,000}{7{,}1} = 17\,605{,}6 \text{ dcm} = 1760{,}56 \text{ m}.$$

Beispiel 2. An einer nach der bekannten Anordnung nur auf Zug beanspruchten 20 m langen Schachtpumpenstange hängt am unteren Ende ein Gewicht von 10000 kg. Es soll der Durchmesser der schmiedeeisernen Stange berechnet werden.

Nach Gleichung 8 ist $F = \frac{P + G}{k}$.

k ist bei der Beanspruchungsweise b (siehe Tabelle Seite 5) 600 kg pro qcm, das specifische Gewicht $s = 7{,}7$ kg. Es ist also

$$\frac{d^2\pi}{4} = \frac{10000 + s\,F\,l}{k},$$

als Maasseinheit ist ein Decimeter anzunehmen, für k also 60000 kg einzusetzen.

$$\frac{d^2\pi}{4} = \frac{10000 + 7{,}7 \, . \, \frac{d^2\pi}{4} \, . \, 200}{60000}$$

$$\frac{d^2\pi}{4}\left(1 - \frac{7{,}7 \, . \, 200}{60000}\right) = \frac{10000}{60000}$$

$d^2 \, . \, 0{,}785 \, . \, 0{,}9744 = 0{,}1666$, $d = \sqrt{0{,}218} = 0{,}46$ dcm $= 46$ mm.

Die Verlängerung der Stange ist nach Gleichung 13 mit Millimeter als Maasseinheit:

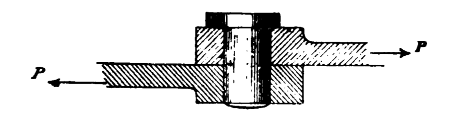
$$\Delta l = \frac{l}{EF}\left(P + \frac{G}{2}\right) =$$

$$\frac{20000}{20000 \, . \, 46^2 \frac{\pi}{4}}\left(10000 + 7{,}7 \, . \, 0{,}46^2 \, . \, 200 \, \frac{\pi}{2 \, . \, 4}\right) = 6{,}1 \text{ mm.}$$

II. Abschnitt.

Scheer- oder Schubfestigkeit.

Sind die äusseren Kräfte vertical gegen die Stabachse so gerichtet, dass deren Resultante durch den Schwerpunkt des meist beanspruchten Querschnittes geht, so ist der Stab auf Abscheerung beansprucht. Zwei benachbarte Querschnitte werden gegenseitig verschoben; es entstehen in den Flächenelementen Schub- oder Tangentialspannungen τ.



Bei der Anwendung ist es üblich, anzunehmen, dass die Spannungen τ in allen Querschnittselementen gleich gross sind. In Wirklichkeit ist dies aber um so weniger der Fall, je mehr die Querschnittsform von einer solchen abweicht, deren Begrenzung stetig und deren Breite in der Schweraxe am grössten ist, die senkrecht zur Kraftrichtung steht.

Der Maximalwerth von τ liegt in dieser Schweraxe. Sehr gross

wird die maximale Schubspannung, wenn der Querschnitt in der Schwer-axe sehr schmal ist im Vergleich zu den übrigen grössten Breiten.*)

Es lässt sich wohl annehmen, wegen des festen Zusammenhanges der einzelnen Elemente eines Querschnittes unter einander und wegen der Unmöglichkeit einer Verschiebung der in der Schweraxe liegenden Elemente ohne die benachbarten Elemente in Mitleidenschaft zu ziehen, dass die Spannungen sich doch nahezu ausgleichen.

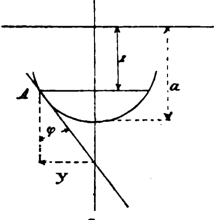
Man kann also ohne Bedenken — wenigstens bei Querschnittsformen, deren Breite in der zur Kraftrichtung senkrechten Schweraxe nicht sehr klein ist im Verhältniss zur grössten Breite — annehmen, dass die Schubkraft proportional ist der Grösse des Querschnittes und der in allen Querschnittselementen constanten Spannung τ, also

$$P = F\tau.$$

Der Sicherheit wegen darf die Tangentialspannung pro Flächeneinheit einen bestimmten Werth kt nicht überschreiten, demnach ist die Tragfähigkeit

---

*) Die Gleichung für die Grösse der Schubspannung eines Punktes A von einem beliebig begrenzten symmetrischen Querschnitt, mit den Coordinaten y und x ist



$$\tau = \frac{P}{y\, J \cos\varphi} \int_0^a y\, x\, dx$$

P die Schubkraft, J Trägheitsmoment des Querschnittes.

Für rechteckigen Querschnitt mit den Seitenlängen $2a$ und b ist

$$\varphi = o,\ \cos\varphi = 1$$

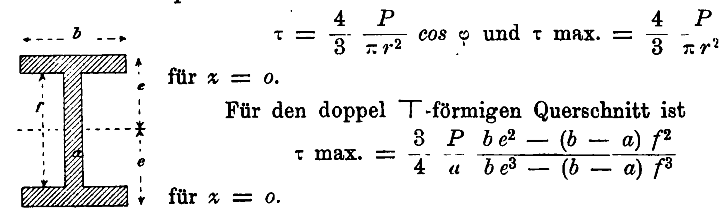
und man erhält

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{P}{F}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

für $x = o$, also in der Y-Axe

$$\tau \text{ max.} = \frac{3}{2}\frac{P}{F}.$$

Für Kreisquerschnitt mit dem Radius r ist



$$\tau = \frac{4}{3}\frac{P}{\pi r^2}\cos\varphi \text{ und } \tau \text{ max.} = \frac{4}{3}\frac{P}{\pi r^2}$$

für $x = o$.

Für den doppel T-förmigen Querschnitt ist

$$\tau \text{ max.} = \frac{3}{4}\frac{P}{a}\frac{b e^2 - (b - a) f^2}{b e^3 - (b - a) f^3}$$

für $x = o$.

$$P = F\,kt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

die Grösse der Querschnittsfläche

$$F = \frac{P}{kt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

die zulässige Beanspruchung

$$kt = \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Der Werth für kt soll später, siehe IV. Abschnitt, hergeleitet werden, vorläufig sei er als Erfahrungswerth angenommen. Es ist

$$kt = \frac{4}{5}\,k,$$

k zulässige Beanspruchung für Zug oder Druck und zwar die kleinere von beiden.

Zu bemerken ist noch, dass Tangentialspannungen nur dann als allein auftretend angenommen werden können, wenn eine Biegung des Stabes bei beliebig gesteigerter Kraft nicht möglich ist.

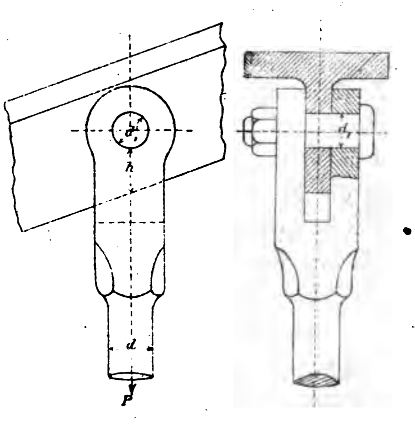
Beispiel 1. Die Keile zum Festhalten des Bügels am Kreuzkopf einer Dampfmaschine sind 16 mm dick und zusammen 40 mm hoch. Die axiale Kraft in der Kurbelstange ist 6000 kg. Wie gross ist die Beanspruchung der Keile?

Für die in 2 Querschnitten beanspruchten Keile ist nach Gl. 16

$$kt = \frac{P}{2\,F} = \frac{6000}{2\,.\,40\,.\,16} \sim 4{,}7 \text{ kg}.$$

Es ist hier die Beanspruchung unter c anzunehmen. Nach der Tabelle würde also für Gussstahl $kt = 4$ kg pro qmm zulässig sein.

Beispiel 2. Die schmiedeeiserne Zugstange eines Dachbinders ist mit Gabelende und Bolzen an der Strebe befestigt. Die Zugkraft in der Stange ist 4000 kg. Wie gross sind die Durchmesser d der Stange und d_1 des Bolzens? Wie gross ist die Höhe h des ⊤ Eisenschenkels unterhalb des Bolzens, wenn der Schenkel 16 mm dick ist?



Für die auf Zug beanspruchte Stange ist nach der Gleichung $F = \frac{P}{k}$, wenn man $k = 800$ kg pro qcm oder 8 kg pro qmm setzt,

$$\frac{d^2\,\pi}{4}\,.\,8 = P,$$

$$d = \sqrt{\frac{P \cdot 4}{\pi \cdot 8}} \backsim 0{,}4 \sqrt{P},$$

$$d = 0.4 \sqrt{4000} = 0{,}4 \cdot 63{,}8 = 25{,}5 \backsim 26 \text{ mm}.$$

Der Bolzen ist auf Abscheerung beansprucht.

Mit $kt = \frac{4}{5}\, k = \frac{4}{5} \cdot 8 = 6{,}4$ kg pro qmm, erhält man aus $F = \frac{P}{kt}$

$$2 \cdot \frac{d_1{}^2 \pi}{4} \cdot 6{,}4 = P,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{P \cdot 4}{2 \cdot \pi \cdot 6{,}4}} \backsim 0{,}31 \sqrt{P},$$

also

$$d_1 = 0{,}31 \sqrt{4000} = 0{,}31 \cdot 63{,}8 = 19{,}67 \backsim 20 \text{ mm}.$$

Das die Zugkraft aufnehmende Stück des Schenkels unter dem Bolzen kann als auf Abscheerung beansprucht angesehen werden. Mit der ohngefähren Höhe h und der Breite der beiden Scheerflächen von 16 mm ist

$$2 \cdot 16 \cdot h \cdot 6{,}4 = 4000$$

$$h = \frac{4000}{2 \cdot 16 \cdot 6{,}4} \backsim 20 \text{ mm}.$$

Die thatsächlichen Verhältnisse erlauben einen grösseren Werth für h.

Beispiel 3. Die Festigkeit der Nietverbindung zweier Blechstreifen soll untersucht werden.

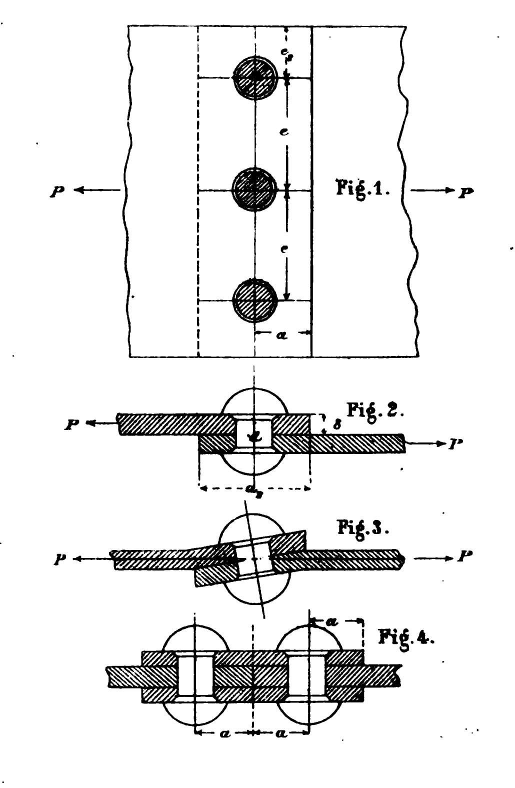
Die Niete werden auf Abscheerung, das Blech auf Zerreissen in der Nietnaht beansprucht.

Die Berechnung des Nietdurchmessers auf Abscheerung ist aber insofern nicht genau, als beim Erkalten nach dem Anhämmern des Kopfes ein axialer Zug entsteht, der mitunter den Tragmodul übersteigen kann.

Bei der einschnittigen Nietung entsteht ausserdem noch eine Zugkraft durch das Moment $P\,\delta$, das die Ueberlappung in die Lage, die Fig. 3 zeigt, zu biegen sucht, oder wenn diese Lage schon vor dem Vernieten hergestellt ist, durch die Componente von P, die in die Nietrichtung fällt. Die durch das Zusammenziehen beim Erkalten entstehende Zugkraft verursacht aber Reibung zwischen den Flächen der Ueberlappung und diese vermindert die Beanspruchung des Nietes auf Schub oder sie hebt diese ganz auf.

Die Zugspannung ist auch nicht angenähert festzustellen und hängt von vielen Nebenumständen ab; deshalb berechnet man den Nietdurchmesser nur auf Abscheerung und nimmt für die zulässige Beanspruchung kt, einen verhältnissmässig kleinen Werth an.

Mit Rücksicht auf das vorzügliche Material der Niete kann man $kt = 6$ kg pro qmm, und für das Blech, welches durch das Lochen oder Bohren und beim Vernieten schädlich beeinflusst wird, kann man eine gleich grosse Zugbeanspruchung k annehmen. Man erhält so mit bewährten Ausführungen übereinstimmende Resultate.



Ist n die Zahl der Niete in einer Reihe, d deren Durchmesser, so ist nach der Gleichung

$$P = F\,kt:$$

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} kt\, n,$$

daraus

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\, kt\, n}}.$$

Für das Blech ist

$$P = (e - d)\,\delta\,.\,k\,.\,n,$$

demnach ist:

$$\frac{d^2 \pi}{4} kt\, n = (e - d)\,\delta\, k\, n$$

und da hier $kt = k$, so ist

$$\frac{d^2 \pi}{4} = (e - d)\,\delta, \text{ daraus } e - d = \frac{d^2 \pi}{4\,\delta}$$

und die Niettheilung

$$e = \frac{d^2 \pi}{4\,\delta} + d.$$

Die Grösse des Nietdurchmessers ist abhängig zu machen von der Druckbelastung des Bleches in der Fläche des Nietloches. Diese Druckbelastung soll 12 kg pro qmm nicht übersteigen, damit nicht Risse und aufgeworfene Ränder entstehen. Es ist also

$$n\, d\, \delta\, 12 \geqq P \geqq \frac{d^2 \pi}{4}\, 6\, n, \text{ daraus}$$

$$d \leqq \frac{8\,\delta}{\pi} \leqq 2{,}5\ \delta.$$

Man macht gewöhnlich $d = 2\,\delta$, dann ist die Zahl der Niete

$$n = \frac{P}{\frac{d^2 \pi}{4} \,.\, kt} = 0{,}212\, \frac{P}{d^2}.$$

Die Breite des Blechstreifens $b = n \,.\, e$.

Die Dimension a entzieht sich fast der Berechnung. Den günstigsten Werth $a = 1{,}5\, d$ bis $1{,}75\, d$ erhält man, wenn man das zwischen Niet und äusseren Blechrand befindliche Stück als einen an den Enden frei aufliegenden, gleichmässig belasteten Träger von der Länge d auf Biegung berechnet.

Damit bei der zweischnittigen Nietung (Fig. 4) die Pressung zwischen Niet und Lochwand 12 kg nicht übersteigt, muss sein

$$12\, d\, \delta \geqq 2\, \frac{d^2 \pi}{4} \,.\, k$$

daraus

$$d \leqq \frac{24\, \delta}{\pi \,.\, k} \leqq \frac{24\, \delta}{\pi \,.\, 6} \leqq \frac{4}{3}\, \delta,$$

ferner muss sein, wegen gleich grosser Beanspruchung von Niet und Blech

$$2\, \frac{d^2 \pi}{4} \,.\, 6 = (e - d)\, \delta \,.\, 6,$$

daraus die Niettheilung

$$e = \frac{d^2 \pi}{2\, \delta} + d$$

und die Zahl der Niete

$$n = \frac{P}{2\, \frac{d^2 \pi}{4}\, 6} = 0{,}106\, \frac{P}{d^2}.$$

Sollen z. B. 2 Blechstreifen von 20 mm Dicke mit einer Zugkraft von 20000 kg durch 2 Laschen verbunden werden und nimmt man den Nietdurchmesser $d = 22$ mm an, so ist

$$n = 0{,}106\, \frac{20000}{22^2} = 4{,}4$$ dafür sind 5 Niete anzunehmen.

Die Niettheilung

$$e = \frac{d^2 \pi}{2\, \delta} + d = \frac{670}{20} + 22 = 60 \text{ mm}.$$

Beispiel 4. Durch eine Blechtafel von 12 mm Dicke soll ein Loch von 16 mm Durchmesser gestossen werden. Welche Kraft ist dazu erforderlich?

Der Widerstand gegen das Lochen ist erfahrungsgemäss 43 kg pro qmm, mithin ist

$$P = F \,.\, 43 = d \pi \delta \,.\, 43 = 16 \,.\, \pi\, 12 \,.\, 43 = 25923 \text{ kg.}$$

Die abzuscheerende Fläche ist die Cylinderfläche $d \pi \delta$ des Loches.

Beispiel 5. In einer hölzernen Strebe, die um 45° geneigt steht, ist ein Druck von 3000 kg vorhanden. Es soll berechnet werden, wie gross der Abstand des Zapfens vom Ende des horizontalen Balkens sein muss, damit das vom Zapfen erfasste Stück des Letzteren nicht ausgescheert wird. Man kann die zulässige Beanspruchung für Fichtenholz $kt = 7$ kg pro qcm annehmen. Es ist die auf Abscheerung wirkende Horizontalkraft

$$P = 3000 \,.\, cos\, 45^0 =$$
$$3000 \,.\, 0{,}707 = 2121 \text{ kg.}$$

Die abzuscheerende Fläche ist

$$F = x \,.\, 6 \text{ cm} + 2 \,.\, x \,.\, 6 \text{ cm}$$

also ist

$$2121 = x\, (6 + 12) \,.\, 7$$

daraus

$$x = \frac{2121}{18 \,.\, 7} \sim 17 \text{ cm.}$$

III. Abschnitt.

Biegungsfestigkeit.

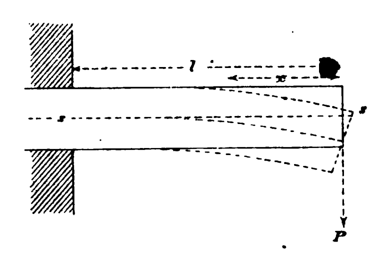
Es sind hier nur senkrecht zur Stabaxe gerichtete äussere Kräfte vorausgesetzt, deren Resultanten durch die Schwerlinie oder Axe des Stabes gehen. Diese Resultanten erzeugen ein Moment — Produkt aus Kraft und Hebelarm — in jedem Querschnitt des Stabes, d. h. sie sind bestrebt denselben zu verbiegen, resp. zu zerbrechen.

Ausserdem entsteht aber in jedem Querschnitt eine resultirende Schubkraft, und streng aufgefasst, müsste man den Stabquerschnitt

immer auf Biegung und Schub berechnen. Der Einfluss der Schubkraft ist aber verschwindend klein und nur bei sehr kurzen Stäben, bei denen das Moment verhältnissmässig klein ist, muss man den Querschnitt auf Biegung und Schub berechnen.*)

Die Linie $s\,s$, die Schwerpunkts- oder Mittellinie des Stabes, nimmt durch die Belastung mit P eine gewisse Krümmung an. Diese gekrümmte Mittellinie nennt man die **elastische Linie.**

Die auf der convexen Seite liegenden Schichten werden bei der Biegung offenbar gezogen, die auf der concaven Seite liegenden gedrückt; die ersteren werden also verlängert, die letzteren verkürzt und zwar um so mehr, je näher sie den äussersten Begrenzungsschichten liegen. Wegen des nothwendigerweise stetigen Ueberganges von Zug in Druck, von Verlängerung in Verkürzung, muss eine Schicht vorhanden sein, die weder gezogen, noch gedrückt, weder verlängert, noch verkürzt wird. Diese Schicht von unendlich kleiner Dicke nennt man die neutrale Schicht.



Ein Querschnitt des Stabes — als ein solcher immer $\perp$ zur Mittellinie — wird von der neutralen Schicht in einer Linie geschnitten, die **neutrale Axe des Querschnittes** heisst.

In den einzelnen Flächenelementen eines Stabquerschnittes von der Grösse F werden durch den Zug oder Druck Normalspannungen σ erzeugt, die mit dem Abstand von der neutralen Axe wachsen und Dehnungen positiv oder negativ erzeugen.

---

*) Ist l die Länge des auf Biegung beanspruchten stabförmigen Körpers, h die Höhe des Querschnittes in der Kraftrichtung, so ist nach „Grashof, Festigkeitslehre" die Berechnung des Körpers auf Biegung und Schub nöthig, wenn

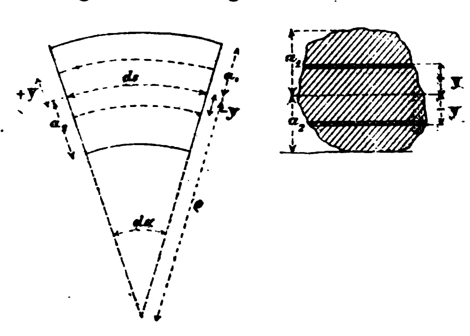
$l \leqq \frac{2}{3}\,h$ bei dem an einem Ende eingeklemmten, am anderen freien Stab.

$l \leqq \frac{4}{3}\,h$ bei dem beiderseits gestützten Stab.

$l \leqq 2\,h$ bei dem beiderseits eingeklemmten Stab.

Bei wesentlich kleinerer Länge, wie dies z. B. bei Keilverbindungen der Fall ist, hat die Berechnung nur auf Scheerfestigkeit zu erfolgen.

Um einen Ausdruck für die Grösse der Spannung σ in einem Querschnittselement dF zu erhalten, denken wir uns ein kleines Stück des gebogenen Stabes von der Länge ds herausgeschnitten.



Die elastische Linie ist im Allgemeinen nicht nach einem Kreisbogen gekrümmt, aber wegen der sehr kleinen Länge des Stückes ds kann man dasselbe als in einem Kreisbogen mit dem Radius ϱ gekrümmt annehmen.

Die Länge der neutralen Schicht ist vor und bei der Biegung $ds = \varrho\, d\alpha$, wenn $d\alpha$ der kleine zu ds gehörige Centriwinkel ist. Eine andere Schicht, deren Abstand $+\,y$ oder $-\,y$ von der neutralen Schicht ist, hat die Länge

$$(\varrho \pm y)\, d\alpha.$$

Die Verlängerung oder Verkürzung ist daher

$$\lambda \text{ (lambda)} = y\, d\alpha.$$

Es ist also

$$\frac{\lambda}{ds} = \frac{y\, d\alpha}{\varrho\, d\alpha} \text{ oder } \frac{\lambda}{ds} = \frac{y}{\varrho}.$$

Nimmt man nun den Querschnitt des Stabelementes gleich der Flächeneinheit und ds gleich der Längeneinheit an, so ist $\frac{\lambda}{ds}$ die Dehnung ε und demnach ist

$$\varepsilon = \frac{y}{\varrho}.$$

Mit Glg. 3, $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, folgt

$$\sigma = \frac{Ey}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

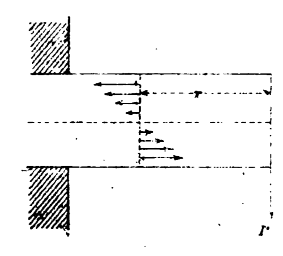
σ erhält den grössten Werth mit $y = a$ für Zug und mit $-\,y = a_1$ für Druck. Dieser grösste Werth soll bei der Anwendung einen gewissen zulässigen Werth k nicht überschreiten, demnach ist:

$$k_1 = E\,\frac{a_1}{\varrho} \text{ für Zug, } k_2 = E\,\frac{a_2}{\varrho} \text{ für Druck} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

wenn k_1 der zulässige Werth von k für Zug ist, k_2 der für Druck.

Das Moment in einem beliebigen Querschnitt in der Entfernung x vom freien Ende des Stabes ist

$$M = S\,.\,x.$$



Mit diesem Moment sucht die Kraft P den Stab in den um x entfernten Querschnitt zu zerbrechen. Denken wir uns das Stück links vom Querschnitt weggeschnitten, so würde das Stück rechts mit der Kraft P in seiner Lage erhalten werden, wenn man in jedem Querschnittselement eine Kraft σ angreifen liesse, deren Moment $\sigma \,.\, y$ ist, wenn y der Abstand des Angriffspunktes der Kraft σ von der neutralen Axe des Querschnittes ist, denn um letztere sucht das Moment Px den Querschnitt zu drehen. Bedingung wäre dabei, dass die Summe aller der Momente σy gleich dem Moment Px ist.

Denken wir uns den Stab nicht durchschnitten, so müssen die Kräfte σ ersetzt werden durch die Spannungen σ; es besteht also der Satz:

Die Summe der Momente der inneren Spannungen in einem Querschnitte muss gleich dem Moment der äusseren Kräfte sein.

Aeussere Kräfte können beliebig viele an beliebigen Punkten angreifen, sie bilden zusammen ein resultirendes Moment M.

Die Summe der über dem Querschnitt F vertheilten, verschieden grossen Momente σy ist ausgedrückt durch das Integral davon, von 0 bis F. Es ist also

$$M = \int_o^F \sigma y \, dF$$

In der neutralen Axe ist die Summe der Spannungen gleich Null. Die Spannung pro Flächenelement ist σdF, oder nach Gl. 17: $E \frac{y}{\varrho} dF$. Es folgt also für die neutrale Axe

$$\int_o^F E \frac{y}{\varrho} dF = o \text{ oder } \frac{E}{\varrho} \int_o^F y dF = o,$$

denn E und ϱ sind constante Grössen.

$\int_o^F y dF = o$ heisst: Die Summe der statischen Momente ist Null.

Dies ist aber bekanntlich nur für die Schwerlinie des Querschnittes der Fall; es folgt also der Satz:

Die neutrale Axe eines Querschnittes ist die Schwerlinie desselben, die senkrecht zur Ebene der Momente der äusseren Kräfte steht.

Mit Einsetzung des Werthes für σ aus Gleichung 17 in die vorletzte Gleichung folgt:

$$M = \int_0^F \frac{E y}{\varrho} \cdot y \, d F, \text{ oder } M = \frac{E}{\varrho} \int_0^F y^2 d F.$$

Den Begriff $\int_0^F y^2 \, dF$, d. h. die Summe der Produkte aus der Grösse aller Flächenelemente und dem Quadrat ihrer Abstände von der neutralen Axe nennt man das **Trägheitsmoment** des Querschnittes und bezeichnet es mit J. Es ist also

$$J = \int_0^F y^2 \, dF \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

und

$$M = \frac{E J}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Nach Gleichung 18 ist allgemein $k = \frac{E a}{\varrho}$, daraus $\varrho = \frac{E a}{k}$.

Mit Einsetzung dieses Werthes in Gl. 20 folgt

$$M = \frac{J}{a} k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

und speciell für die gezogene Seite:

$$M = \frac{J}{a_1} k_1,$$

für die gedrückte:

$$M = \frac{J}{a_2} k_2.$$

Den Werth $\frac{J}{a}$, d. h. den Quotient aus Trägheitsmoment und Abstand der äussersten Schicht oder Faser von der neutralen Axe, nennt man das **Widerstandsmoment** W.

Ist der Querschnitt nicht symmetrisch zur neutralen Axe, so sind a_1 und a_2 verschieden und er hat zwei verschieden grosse Widerstandsmomente:

$$W_1 = \frac{J}{a_1} \text{ und } W_2 = \frac{J}{a_2},$$

dann ist

$$M = W_1 \, k_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22a)$$

oder

$$M = W_2 \, k_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22b)$$

und bei symmetrischem Querschnitt und gleichem Werth für k_1 und k_2 ist

$$M = W k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Diese Gleichung ist die Festigkeitsgleichung für Biegung, nach welcher der Querschnitt oder die Tragfähigkeit eines stabförmigen Körpers berechnet werden kann.

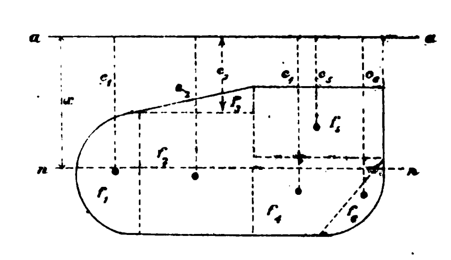
Von den speciellen Formen derselben Nr. 22*a* und 22*b* kommt diejenige zur Verwendung, die den kleineren Werth hat.

Zur Berechnung eines Körpers auf Biegung muss also zunächst die Bestimmung der Lage der neutralen Axe und die Bestimmung des Trägheits- und des Widerstandsmomentes bekannt sein.

Bestimmung der Lage der neutralen Axe.

Lässt sich eine Fläche in einzelne Theile f_1, f_2, f_3 u. s. w. zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt oder nach den bekannten Regeln leicht zu bestimmen sind, und sind c_1, c_2, c_3 u. s. w. die Abstände der Schwerpunkte von einer beliebigen Geraden *aa*, so ist der Abstand der mit der Geraden parallelen Schwerlinie *nn*

$$x = \frac{f_1 c_1 + f_2 c_2 + f_3 c_3 + \text{u. s. w.}}{f_1 + f_2 + f_3 + \text{u. s. w.}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$



denn es ist das statische Moment der ganzen Fläche $M = x(f_1 + f_2 + f_3 + \text{u. s. w.})$ und die Summe der statischen Momente der Flächentheile $M = f_1 c_1 + f_2 c_2 + f_3 c_3 +$ u. s. w., beide sind gleich und daraus folgt der Abstand des Schwerpunktes der ganzen Fläche:

$$x = \frac{\text{Summe der statischen Momente der einzelnen Flächen.}}{\text{Summe der einzelnen Flächen.}}$$

Die neutrale Axe ist dann die Gerade durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Kraftrichtung oder senkrecht zur Ebene des Momentes steht. Legt man die Gerade *aa* in diese Richtung, so ist die zu *aa* parallele Gerade *nn*, im Abstande *x*, die neutrale Axe.

Sind einzelne Flächentheile aus der ganzen Fläche herausgeschnitten, so kommen die zugehörigen Glieder *fc* und *f* mit negativem Vorzeichen in die Formel für *x*.

Bestimmung der Trägheits- und Widerstandsmomente der wichtigsten Querschnittsformen.

1. Trägheitsmoment des Rechtecks auf eine Seite als Axe bezogen.

Es sei das auf eine der Seiten des Rechtecks bezogene Trägheitsmoment mit J_1 bezeichnet, dann ist

J_1 = Summe der Trägheitsmomente der einzelnen sehr schmal gedachten Flächenstreifen $b\,c$, deren Fläche mit f bezeichnet sei. Es ist also, wenn Σ „Summe" bedeutet und wenn y der Abstand des Streifens $b\,c$ von der Geraden $n_1\,n_1$ ist,

$$J_1 = \Sigma y^2 f.$$

Bezeichnet man das Stück $b\,d$ des Streifens mit f_1, so ist

$$f : f_1 = h : y \text{ und } f = \frac{f_1 \,.\, h}{y}.$$

Mit Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung für J_1 erhält man

$$J_1 = \Sigma y f_1 \,.\, h,$$

$\Sigma y f_1$ ist aber das statische Moment des Dreiecks $a\,e\,f$ bezogen auf die Gerade $n_1\,n_1$ und dieses ist das Produkt aus Fläche und Abstand des Schwerpunktes:

$$\frac{b\,h}{2} \,.\, \frac{2}{3}\,h, \text{ demnach ist } J_1 = \frac{1}{3}\,b\,h^2 \,.\, h = \frac{b\,h^3}{3} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

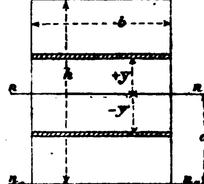
Die Ableitung mit Hülfe der höheren Mathematik ist einfacher.

Wenn man f unendlich klein werden lässt, so hat man das Differential $d\,F$ und es ist

$$J_1 = \int_0^F y^2 d\,F = \int_0^h y^2\,b\,dy = b\int_0^h y^2\,dy = \frac{b\,h^3}{3}.$$

2. Trägheitsmoment des Rechtecks bezogen auf die neutrale Axe.

Das Trägheitsmoment eines Flächenelementes f, im Abstand $+\,y$, oder $-\,y$ von der neutralen Axe $n\,n$, bezogen auf die Axe $n_1\,n_1$ ist



$$\Sigma\,(a \pm y)^2\,f = \Sigma\,a^2\,f \pm \Sigma\,2\,a\,y\,f + \Sigma y^2\,f$$

oder $J_1 = a^2\,\Sigma f \pm 2\,a\,\Sigma y\,f + \Sigma\,y^2\,f.$

Σf ist aber F, $\Sigma\,y^2 f$ ist das Trägheitsmoment J bezogen auf die neutrale Axe,

und $\Sigma y f$ ist das statische Moment der Fläche, bezogen auf die neutrale Axe oder Schweraxe. Die Grösse derselben ist bekanntlich Null, mithin ist

$$J_1 = a^2 F + J \text{ oder } J = J_1 - a^2 F \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Der Satz gilt, wie leicht ersichtlich, für alle Querschnittsformen. Für das Rechteck ist

$$J = \frac{b h^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \,.\, h = \frac{b h^3}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

und das Widerstandsmoment $W = \frac{J}{a} = \frac{b h^2}{6}$ . . . . (27).

Mit diesem Trägheitsmomente für das Rechteck lassen sich leicht die Trägheitsmomente derjenigen Querschnittsformen bestimmen, die aus einzelnen Rechtecken bestehen, durch Summirung der Trägheitsmomente der einzelnen Rechtecke.

Nach Gleichung 22 ist $M = W k$, die zulässige Belastung ist bei gegebener Querschnittsfläche also um so grösser, je grösser W ist. W wächst aber mit dem Quadrat der Höhe; es haben demnach die Querschnitte von gleichem Flächeninhalt grössere Tragfähigkeit, die bei kleinerer Breite grössere Höhe in der Kraftrichtung haben. Dem entsprechen die für Biegung in der Praxis üblichen Querschnittsformen, von denen die wichtigsten hier angeführt seien.

Der Querschnitt besteht aus zwei Rechtecken, deren eines die Breite b, das andere aus zwei Theilen bestehend, die Breite $B - b$ hat. Beide Rechtecke haben dieselbe neutrale Axe und es ist auf diese bezogen:

$$J = \frac{1}{12}\left[b H^3 + (B - b) h^3\right] \quad \ldots \quad (28).$$

Die Entfernung a der äussersten Schicht von der neutralen Axe ist hier $\frac{H}{2}$, also das für beide Seiten derselben gleich grosse Widerstandsmoment

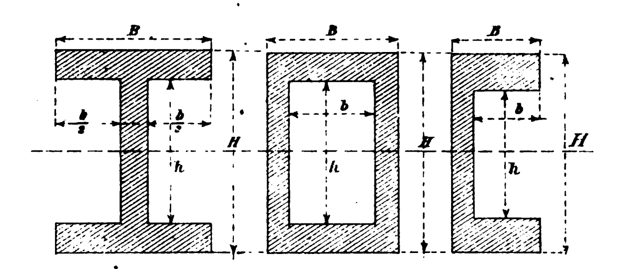
$$W = \frac{J}{a} = \frac{1}{6}\left[b H^2 + (B - b)\frac{h^3}{H}\right]$$

$$= \frac{b H^2}{6}\left[1 + \frac{B - b}{b}\,\frac{h^3}{H^3}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

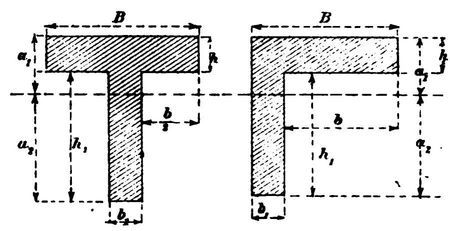
Für die umstehenden Profile erhält man

$$J = \frac{1}{12}\left[B H^3 - b h^3\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30).$$

$$\text{und } W = \frac{1}{6}\left[B H^2 - b\frac{h^3}{H}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31).$$



Zur Bestimmung der Lage der neutralen Axe nebenstehender unsymmetrischer Querschnitte ist nach Gl. 23



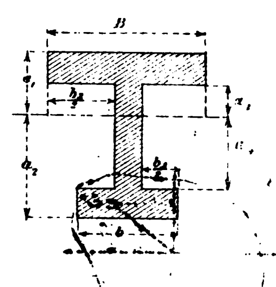
$$a_1 = \frac{Bh\frac{h}{2} + h_1 b_1 \cdot \left(h + \frac{h_1}{2}\right)}{B\,h \cdot + h_1 \cdot b_1}$$

Die neutrale Axe fällt mit je einer Seite der drei Rechtecke $B a_1$, $b_1\, a_2$ und $b\ (a_1 - h)$ zusammen; es ist also das Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{3}\left[Ba_1{}^3 - b\,(a_1 - h)^3 + b_1\,a_2{}^3\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

und die Widerstandsmomente

$$W_1 = \frac{J}{a_1},\ W_2 = \frac{J}{a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$



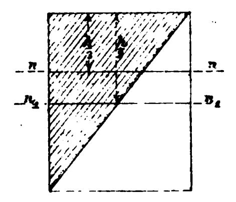
Die nummerische Berechnung von a nach Gl. 23 vorausgesetzt, ist für nebenst. Fig.

$$J = \frac{1}{3}\left[Ba_1{}^3 - b_2\,a_3{}^3 + b\,a_2{}^3 - b_1\,a_4{}^3\right] \quad (34)$$

$$W_1 = \frac{J}{a_1},\ W_2 = \frac{J}{a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

3. Trägheitsmoment des Dreiecks bezogen auf die neutrale Axe.

Da das Dreieck die Hälfte des Rechtecks ist, so ist sein Trägheitsmoment bezogen auf die Axe $n_1\ n_1$



$$J_1 = \frac{b\,h^3}{24}.$$

Der Abstand der beiden Schwerlinien ist

$$a = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6},$$

nach Gleichung 25 ist also

$$J = J_1 - F \cdot a^2 = \frac{b h^3}{24} - b \cdot \frac{h}{2}\left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{b h^3}{36} \quad . \quad . \quad (36).$$

Für die Widerstandsmomente ist $a_1 = \frac{h}{3}$ und $a_2 = \frac{2}{3} h$, mithin

$$W_1 = \frac{b h^2}{12}, \; W_2 = \frac{b h^2}{24} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37).$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment bezogen auf die Grundlinie mit J_2, so ist nach Gleichung 25

$$J_2 = J + F a^2,$$

also

$$J_2 = \frac{b h^3}{36} + \frac{b h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b h^3}{12} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38).$$

4. Das Trägheitsmoment bezogen auf eine Axe durch die Spitze ist

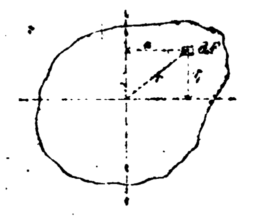
$$J_3 = \frac{b h^3}{36} + \frac{b h}{2}\left(\frac{2 h}{3}\right)^2 = \frac{b h^3}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

Polares Trägheitsmoment.

Wenn man das Trägheitsmoment nicht auf eine Schwerlinie, sondern auf den Schwerpunkt selbst bezieht und den Abstand eines Flächenelementes vom Schwerpunkt mit r bezeichnet, so erhält man das polare Trägheitsmoment

$$J_p = \int_0^F r^2 \, dF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

zum Unterschied von dem auf die neutrale Axe bezogenen, das man auch aequatoriales Trägheitsmoment nennt.



Für das Flächenelement dF ist

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

demnach ist

$$\int_0^F r^2 dF = \int_0^F x^2 \, dF + \int_0^F y^2 \, d F.$$

$\int_0^F x^2 \, dF$ ist aber das aequatoriale Trägheitsmoment J_x auf die verticale Axe und $\int_0^F y^2 d F$ ist das aequatoriale Trägheitsmoment J^y auf die horizontale Axe bezogen, mithin ist

$$J_p = J_x + J_y$$

Ist der Querschnitt symmetrisch in Bezug auf den Schwerpunkt, so ist

$$J^x = J^y = J.$$

und

$$J_p = 2\,J \quad \ldots \ldots \quad (41).$$

6. Trägheits- und Widerstandsmoment des Kreises.

Denkt man sich den Kreis aus lauter Dreiecken bestehend, deren Grundline b sehr klein ist, so dass man sie als geradlinig annehmen kann, so ist deren Höhe gleich r, und das Trägheitsmoment jedes der Dreiecke, auf die Spitze bezogen, nach Gl. 39

$$\frac{b\,r^3}{4}.$$

Das polare Trägheitsmoment des Kreises ist die Summe dieser, also

$$J_p = \Sigma \frac{b r^3}{4} = \frac{r^3}{4} \Sigma b.$$

Die Summe der b ist aber der Kreisumfang, demnach ist

$$J_p = 2\,r\pi \frac{r^3}{4} = r^4 \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

und das polare Widerstandsmoment

$$W_p = \frac{J_p}{r} = r^3 \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \quad (43).$$

Da nach Gl. 41 $J_p = J$ ist, so ist das aequatoriale Trägheitsmoment

$$J = r^4 \frac{\pi}{4}$$

und mit dem Durchmesser $d = 2r$ folgt

$$J = d^4 \frac{\pi}{64} \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

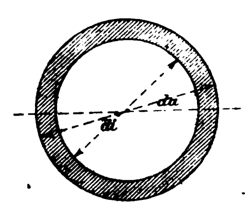
das Widerstandmoment

$$W = \frac{J}{\frac{d}{2}} = d^3 \frac{\pi}{32} \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

7. Trägheits- und Widerstandsmoment des Kreisringes.

$$J = \frac{\pi}{64}\left[d_a^4 - d_i^4\right] \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

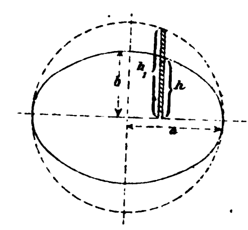
$$W = \frac{\pi}{32}\left[\frac{d_a^4 - d_i^4}{d}\right] \quad \ldots \ldots \quad (47).$$



Das polare Widerstands- und Trägheitsmoment ist doppelt so gross.

8. Trägheits- und Widerstandsmoment der Elipse.

Denkt man sich die Elipse und den umschriebenen Kreis in sehr schmale Streifen getheilt, die als Rechtecke anzusehen sind, mit der Breite x und den Höhen h und h_1, so sind deren Trägheitsmomente $\frac{xh^3}{12}$ und $\frac{x\,h_1{}^3}{12}$. Die Trägheitsmomente verhalten sich also wie $h^3 : h_1{}^3$. Das Verhältniss der Höhen, $h : h_1$, ist aber constant $= b : a$, es ist also



$$\Sigma \frac{x\,h^3}{12} : \Sigma \frac{x\,h_1{}^3}{12} = b^3 : a^3$$

oder

Trägheitsmoment der Elipse J: Trägheitsmoment des Kreises $= b^3 : a^3$ und

$$J = a^4 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b^3}{a^3} = a b^3 \frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

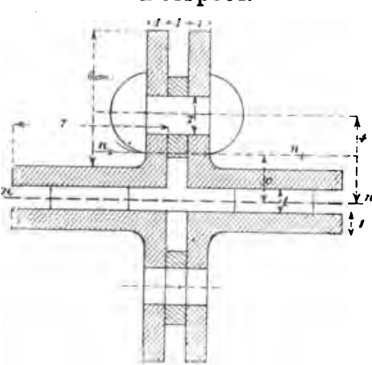
$$W = a b^2 \frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49).$$

Ist die kleine Axe $2b$ die neutrale Axe, so wird

$$J = b\,a^3 \frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

$$W = b\,a^2 \frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \quad (51).$$

Beispiel.



Das Trägheitsmoment einer aus 4 Winkeleisen zusammengenieteten Säule soll berechnet werden.

Ist i das Trägheitsmoment eines Winkeleisenquerschnittes, so ist $J = 4\,i$.

Für den Winkeleisenquerschnitt ist die Entfernung der neutralen Axe $n_1\,n_1$ von der Axe $n\,n$ nach Gl. 23:

$$x = \frac{6 \,.\, 1 \,.\, (3 + 1 + {}^1/_2) + 7 \,.\, 1 \,.\, 1 - 1 \,.\, 2 \,.\, 4}{6 \,.\, 1 + 7 \,.\, 1 - 2 \,.\, 1} = 2{,}36 \text{ cm.}$$

Das Trägheitsmoment nach Gl. 32, in der $B = 7$ cm, $a_1 = 2{,}36 - 0{,}5 = 1{,}86$ cm, $b = 6$ cm, b_1 und $h = 1$ cm, $a_2 = 7{,}5 - 2{,}36 = 5{,}14$, ist mit Rücksicht auf das Nietloch:

$$i = {}^1/_3\,[7 \,.\, 1{,}86^2 - 6\,(6 - 5{,}14)^3 + 1 \,.\, 5{,}14^3 - 1 \,.\, 2{,}64^3 + 1 \,.\, 0.64^3] = 52{,}9.$$

Das Trägheitsmoment des Winkelquerschnittes bezogen auf die Axe $n\,n$ ist nach Gl. 25

$$i_1 = i + Fa^2 = 52{,}9 + (6 + 7 - 2)\,2{,}36^2 = 114{,}2$$

und das ganze Trägheitsmoment ist

$$J = 4\,i_1 = 4 \cdot 114{,}2 \backsim 457.$$

Gleichung der elastischen Linie.

Zur Berechnung der Durchbiegung eines belasteten Stabes bietet die Gleichung 20

$$M = \frac{EJ}{\varrho}$$

ein bequemes Mittel. Auf die rechtwinklichen Coordinatenaxen X und Y bezogen, ist nach der analytischen Geometrie die Gleichung des Krümmungsradius für einen beliebigen Punkt einer Curve mit den Coordinaten x und y

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Die Durchbiegung eines belasteten Constructionstheils soll sein und ist in allen Fällen eine sehr geringe, der Werth von $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ wird deshalb so klein, dass man ihn ohne bemerkbaren Fehler vernachlässigen kann.

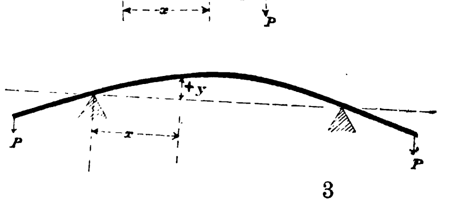
Man hat demnach

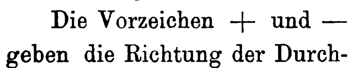
$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}$$

und mit Einsetzung des Werthes in Gl. 20

$$M = \pm EJ\,\frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52.$$

Die Gleichung sei **„Gleichung der elastischen Linie“** genannt. $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist der zweite Differenzialquotient der Durchbiegung y der Stabaxe an einem Punkt, dessen Abscisse x ist. Wenn man also eine zweimalige Integration der obigen Differenzialgleichung vornimmt, so erhält man y. M, von x abhängig, ist das Moment in dem fraglichen Punkt.



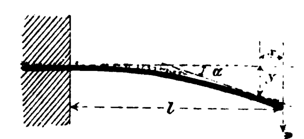


Die Vorzeichen $+$ und $-$ geben die Richtung der Durch-

biegung an. Es gelte das — Vorzeichen für concave, das + Vorzeichen für convexe Durchbiegung. Für die Momente gelte der Drehungssinn von rechts nach links als negativ, von links nach rechts als positiv.

Berechnung des durch Einzelkräfte belasteten Stabes.

1. Der Stab ist an einem Ende horizontal eingeklemmt und am andern Ende durch eine Einzelkraft belastet.



Das grösste oder Maximalmoment findet hier offenbar an der Befestigungsstelle statt und es ist

$$M_{max.} = Pl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 53.$$

Die Stelle, wo das Maximalmoment wirkt, wo also bei gleichmässiger Beschaffenheit des Stabes der Bruch stattfinden würde, nennt man den **gefährlichen Querschnitt** und es handelt sich zunächst um die Berechnung dieses Querschnittes und der Tragfähigkeit. Die Querschnittsdimensionen enthält aber das Widerstandsmoment W. Nach Gl. 22, $M = Wk$ ist

$$Pl = Wk,$$

mithin die Tragfähigkeit

$$P = \frac{Wk}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 54.$$

Ist die Belastung P gegeben, so dient zur Berechnung des Querschnittes die Gleichung

$$W = \frac{Pl}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55.$$

Bei bekanntem Querschnitt und bekannter Belastung ist die grösste Beanspruchung pro Quadrateinheit

$$k = \frac{Pl}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56.$$

Zur Berechnung der Durchbiegung ist das Moment an einer beliebigen Stelle in der Entfernung x vom Ende

$$M = Px$$

Nach Gl. 52 ist

$$\pm EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Px.$$

Nach einmaliger Integration erhält man

$$\pm EJ \frac{dy}{dx} = P \frac{x^2}{2} + C_1.$$

$\frac{dy}{dx}$ giebt die Neigung der Tangente in dem fraglichen Punkt der elastischen Linie an und es ist $\frac{dy}{dx} = tang\ \alpha$. An der Befestigungsstelle ist aber $\alpha = o$, also auch $\frac{dy}{dx} = o$ und $x = l$. Mit Einsetzung dieser Werthe erhält man

$$o = P\frac{l^2}{2} + C_1 \text{ und } C_1 = -P\frac{l^2}{2}.$$

Es ist also

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = P\frac{x^2}{2} - \frac{Pl^2}{2}.$$

Nochmalige Integration ergiebt

$$\pm EJy = P\frac{x^3}{6} - \frac{Pl^2x}{2} + C_2.$$

Die Constante C_2 erhält man, wenn man wieder $x = l$ setzt, denn an der Belastungsstelle ist die Durchbiegung $y = o$ und es wird demnach

$$C_2 = \frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6} = \frac{1}{3}Pl^3$$

und

$$\pm EJy = P\frac{x^3}{6} - \frac{Pl^2x}{2} + \frac{1}{3}Pl^3,$$

die Durchbiegung (y ist positiv wegen convexer Krümmung)

$$y = \frac{Pl^3}{6EJ}\left[\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x}{l} + 2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 57.$$

Die grösste, am freien Ende mit der Entfernung $x = o$, stattfindende Durchbiegung folgt hieraus

$$y_{max.} = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 58.$$

Beispiel 1. Ein eichener Balken, 1,4 m lang, 20 cm hoch und 11 cm breit ist an einem Ende eingemauert, am andern belastet. Wie gross darf die Last sein?

$$P = \frac{Wk}{l},\ k = 120 \text{ kg pro qcm},\ W = \frac{bh^2}{6},$$

$$P = \frac{bh^2k}{6\,.\,l} = \frac{11\,.\,20^2\,.\,120}{6\,.\,140} = 628{,}6 \text{ kg}.$$

Beispiel 2. Eine an dem einen Ende befestigte, am andern Ende mit 1000 kg belastete, 1,5 m lange Flacheisenschine hat die Breite $b = 3$ cm. Wie gross muss die Höhe h sein?

$M = Wk$. $k = 800$ kg pro qcm angenommen.

$$W = \frac{M}{k} \text{ oder } \frac{bh^2}{6} = \frac{Pl}{k},\ h = \sqrt{\frac{1000.150.6}{3\ .\ 800}} = 19{,}36 \text{ cm.}$$

Wie gross ist die Durchbiegung am freien Ende?

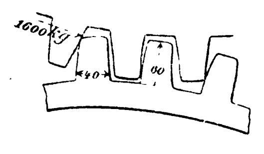
Nach Gl. 58 ist

$$y_{max.} = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{1000}{2000000\ .\ \frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{150^3}{3}$$

$$= \frac{12\ .\ 3375000}{2000\ .\ 3\ .\ 7256{,}3\ .\ 3} = 0{,}31 \text{ cm} = 3{,}1 \text{ mm.}$$

Beispiel 3. Die Zähne eines gusseisernen Rades sind 60 mm hoch, 40 mm breit und 120 mm lang. Der Zahndruck ist 1600 kg. Wie gross ist die Beanspruchung der Zähne?

Nach Gl. 56 ist



$$k = \frac{M}{W},$$

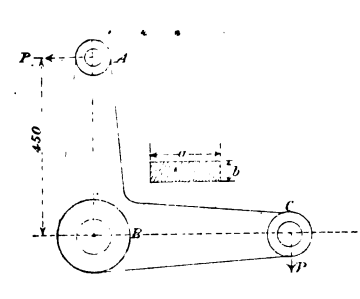
ferner ist

$$M_{max.} = 1600\ .\ 60,\ W = \frac{120\ .\ 40^2}{6},$$

demnach

$$k = \frac{1600\ .\ 60\ .\ 6}{120\ .\ 40^2} = 3 \text{ kg pro qmm.}$$

Diese Beanspruchung entspricht der wechselnden Belastung zwischen Null und einem Maximum, siehe Tabelle Seite 5, unter b.



Beispiel 4. An dem Ende A des Hebels AB wirkt die Kraft $P = 300$ kg. Es soll der Querschnitt des Armes berechnet werden. Material: Schmiedeeisen.

Das Maximalmoment in der Mitte der Nabe ist $M = 300\ .\ 450$.

Nach Gl. 55 ist

$$W = \frac{M}{k}.$$

Wegen der Belastungsweise c (zwischen positiver und negativer Spannung wechselnd, da beim Hin- und Hergange des Hebels der Widerstand P_1 bei C wirkt) ist $k = 3$ kg pro qmm anzunehmen.

Nimmt man ferner $b = \frac{1}{3} a$ an, so ist

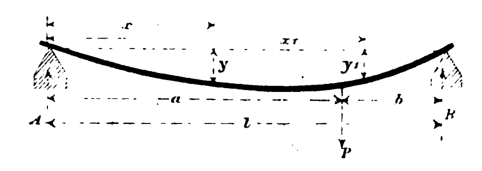
$$\frac{ba^2}{6} \text{ oder } \frac{a^3}{18} = \frac{300\ .\ 450}{3},$$

woraus

$$a = \sqrt[3]{100 \,.\, 450 \,.\, 18} \sim 93 \text{ mm und } b = \frac{93}{3} = 31 \text{ mm.}$$

2. Der Stab ist an den beiden Enden gestützt und trägt an beliebiger Stelle die Last P.

Die Belastung P erzeugt in jeder Stütze einen Druck, der von dieser in entgegengesetzter Richtung erwidert und **Reaction** genannt wird. Die Reactionen, die immer gleichnamig mit den Stützpunkten — hier A und B — bezeichnet seien, sind als äussere Kräfte in Rechnung zu bringen.



Die Reaction A, d. h. der von P auf den Stützpunkt A entfallende Theil als Gegendruck, ist

$$A = P \frac{b}{l},$$

denn mit B als Drehpunkt ist für Gleichgewicht

$$A l = P b.$$

Die Reaction

$$B = P \frac{a}{l} .$$

Das Moment an einer beliebigen Stelle in der Entfernung x ist

$$M_x = A \,.\, x = P \frac{b}{l} x.$$

Das Moment an einer anderen Stelle in der Entfernung x_1 ist aus 2 Momenten zusammengesetzt, aus dem Moment $A x_1$, dessen Drehungssinn von links nach rechts geht und aus dem Moment $P (x_1 - a)$ mit dem entgegengesetzten Drehungssinn. Das resultirende Moment ist demnach

$$M_{x_1} = P \frac{b}{l} x_1 - P (x_1 - a).$$

Mit $b = l - a$ wird $M_{x_1} = P a - P \frac{a}{l} x_1 = P \frac{a}{l} (l - x_1)$

Die gleichen nummerischen Werthe erhalten die Momente, wenn man sie von der andern Seite aus mit der Reaction B bildet.

Wie leicht ersichtlich, muss hier das Maximalmoment das an der Belastungsstelle P sein

$$M_{max.} = A a = B b = P \frac{b}{l} a = P \frac{a}{l} \,.\, b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59.$$

Für die Tragfähigkeit ist, nach der Gleichung $M = Wk$

$$P\frac{ab}{l} = Wk \quad \text{. . . . .} \quad 60.$$

Bei bekannter Belastung sind hieraus das Widerstandsmoment W und damit die Querschnittsdimensionen und bei bekanntem Querschnitt und gegebener Belastung ist die Grösse der Beanspruchung k leicht zu berechnen.

Zur Bestimmung der Durchbiegung hat man nach Gl. 52 den Ausdruck $\frac{M}{EJ}$ zweimal zu integriren, dabei ist es, wegen der Bestimmung der Integrationsconstanten aber nöthig, auch das Moment M_{x_1} in Betracht zu ziehen.

Nach Gl. 52 ist

$$\pm EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = P\frac{b}{l}x$$

und integrirt:

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = P\frac{b}{l}\frac{x^2}{2} + C \quad \text{. . . . .} \quad \text{I}$$

$$\pm EJy = P\frac{b}{l}\frac{x^3}{6} + Cx + C_1 \quad \text{. . . . .} \quad \text{II.}$$

Für den anderen Theil des Stabes ist

$$\pm EJ\frac{d^2y_1}{dx_1^{\,2}} = M_{x1} = Pa - P\frac{a}{l}x_1$$

$$\pm EJ\frac{dy_1}{dx_1} = Pax_1 - P\frac{a}{l}\frac{x_1^{\,2}}{2} + D \quad \text{. . . . . . .} \quad \text{III}$$

$$\pm EJy_1 = Pa\frac{x_1^{\,2}}{2} - P\frac{a}{l}\frac{x_1^{\,3}}{6} + Dx_1 + D_1 \quad \text{. . .} \quad \text{IV.}$$

Für $x = o$ ist $y = o$, also ist nach Gleichung II $C_1 = o$.

Für $x_1 = l$ ist $y_1 = o$, also ist nach Gl. IV

$$D_1 = Pa\frac{l^2}{6} - Pa\frac{l^2}{2} - Dl = + Pa\frac{l^2}{3} - Dl \quad \text{. .} \quad \text{V.}$$

Mit Einsetzung dieser Werthe für C_1 und D_1 lauten die Gleichungen II und IV

$$\pm EJy = P\frac{b}{l}\frac{x^3}{6} + Cx,$$

$$\pm EJy_1 = Pa\frac{x_1^{\,2}}{2} - P\frac{a}{l}\frac{x_1^{\,3}}{6} + Dx_1 - Pa\frac{l^2}{3} - Dl.$$

Da für $x = a$ und und für $x_1 = a$, also im Belastungspunkt, wo beide Theile der elastischen Linie zusammentreffen, diese die gleiche Durchbiegung haben, so können die Ausdrücke für y und für y_1

einander gleichgesetzt werden, wenn man für x und x_1 den Werth a einsetzt:

$$\frac{1}{EJ}\left(P\frac{b}{l}\frac{a^3}{6}+Ca\right)=\frac{1}{EJ}\left(P\frac{a^3}{2}-P\frac{a^4}{6l}+D(a-l)-P\frac{al^2}{3}\right)$$

oder

$$P\frac{ba^3}{6l}+Ca=P\frac{a^3}{2}-P\frac{a^4}{6l}-Db-P\frac{al^2}{3}$$

$$Ca+Db=\frac{P}{6l}(3a^3l-a^4-2al^3-ba^3).$$

Setzt man hierin für b: $l-a$ ein, so erhält man

$$Ca+Db=P\frac{a^3}{3}-P\frac{al^2}{3}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \text{VI.}$$

An der Belastungsstelle, wo die beiden Theile der elastischen Linie stetig in einander übergehen, fallen die Tangenten derselben zusammen in eine und es ist also für $x=a$ und für $x_1=a$ auch die Neigung der Tangente, das ist $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy_1}{dx_1}$, für beide Theile gleich, demnach ist nach Gleichung I und III

$$P\frac{ba^2}{2l}+C=Pa^2-P\frac{a^3}{2l}+D.$$

Mit $b=l-a$ folgt

$$C-D=P\frac{a^2}{2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \text{VIIa}$$

und

$$Ca-Da=P\frac{a^3}{2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \text{VII.}$$

Durch Subtraction der Gl. VII von Gl. VI erhält man

$$Da+Db=-P\frac{a^3}{6}-P\frac{al^2}{3},$$

oder, da $a+b=l$ ist;

$$Dl=-P\frac{a^3}{6}-P\frac{al^2}{3}$$

$$D=-P\frac{a}{3l}\left(\frac{a^2}{2}+l^2\right).$$

Aus Gl. VIIa ergiebt sich mit Einsetzung dieses Werthes

$$C=P\frac{a^2}{2}-P\frac{a}{3l}\left(\frac{a^2}{2}+l^2\right).$$

Aus Gl. V ergiebt sich

$$D_1=-P\frac{al^2}{3}+P\frac{a^3}{6}+P\frac{al^2}{3}=P\frac{a^3}{6}.$$

Für den Theil der elastischen Linie links vom Belastungspunkt ist nun mit Einsetzung des Werthes von C und des Werthes von $C_1 = o$

$$\pm EJy = P\frac{bx^3}{6l} + Pax\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{6l} - \frac{l}{3}\right).$$

Da $l = a + b$ ist, so vereinfacht sich das zweite Glied, es wird

$$\pm EJy = P\frac{bx^3}{6l} - P\frac{axb}{6l} \cdot (a + 2b)$$

und die Durchbiegung (y ist negativ, wegen concaver Krümmung)

$$y = \frac{P}{EJ}\frac{a^2b^2}{6l}\left[\frac{x}{b} + \frac{2x}{a} - \frac{x^3}{a^2b}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 61.$$

An der Belastungsstelle ist $x = a$, also die Durchbiegung

$$y = \frac{P}{EJ}\frac{a^2b^2}{3l}.$$

Zur Berechnung der maximalen Durchbiegung ist zunächst die Abscisse x für den Ort derselben zu bestimmen. Diese ergiebt sich leicht mit Rücksicht darauf, dass der Punkt der grössten Durchbiegung der Scheitelpunkt der elastischen Linie, dass also der Neigungswinkel der Tangente in diesem Punkte gleich Null sein muss. Es ist dann auch die Tangente des Winkels oder $\frac{dy}{dx} = o$.

Nach Gl. I ist demnach

$$P\frac{bx^2}{2l} + P\frac{a^2}{2} - P\frac{a}{3l}\left(\frac{a^2}{2} + l^2\right) = o.$$

Daraus folgt mit $l = a + b$

$$x = a\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{b}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 62.$$

Diesen Werth für x rechnet man nummerisch aus und setzt ihn dann in die Gl. 61 ein, um $y_{max.}$ zu erhalten.

Die Winkel, unter denen sich die elastische Linie an den Stützpunkten gegen die Horizontale neigt, lassen sich leicht durch die Gleichungen für die Tangenten der Winkel $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy_1}{dx_1}$ bestimmen, indem man in der ersten $x = o$, in der zweiten $x_1 = l$ setzt.

Die Gleichung für die Durchbiegung y_1 der rechten Seite erhält man ebenso durch Einsetzen der Werthe für die Constanten D und D_1. Da aber die grösste Durchbiegung immer auf der Seite der grösseren Stabhälfte liegen muss, so genügt zur Berechnung jener in allen Fällen die Gleichung 61, wenn A und a stets der längeren Stabhälfte angehören.

3. Der Stab ist in der Mitte der Entfernung der Stützpunkte belastet.

In diesem Falle ist

$$\text{Reaction } A = \text{Reaction } B = \frac{P}{2}$$

$$M_{max.} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = P\frac{l}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 63.$$

Für die Tragfähigheit ist

$$P\frac{l}{4} = Wk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 64.$$

Die grösste Durchbiegung muss in der Mitte zwischen A und B stattfinden, also für $x = \frac{l}{2}$.

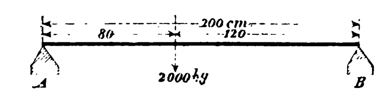
Nach Gleichung 61 ist nach Einsetzung von $\frac{l}{2}$ für x, a und b:

$$y_{max.} = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 65.$$

Beispiel 1. Ein mit beiden Enden frei aufliegender Träger von I Eisen, 2 m lang, ist in der Entfernung von 80 cm von dem einen Stützpunkt mit 2000 kg belastet. Wie gross ist das Profil des Trägers?

Das Maximalmoment ist

$$M = A \,.\, 80.$$



Die Reaction A erhält man aus der Bedingung für Gleichgewicht

$$A \,.\, 200 = 2000 \,.\, 120,$$

woraus

$$A = \frac{2000 \,.\, 120}{200} = 1200 \text{ kg}.$$

Nach der Gleichung $M = Wk$ ist nun mit $k = 900$ kg

$$1200 \,.\, 80 = W \,.\, 900,$$

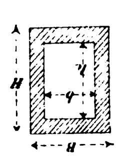
daraus die nöthige Grösse des Widerstandsmomentes

$$W = \frac{1200 \,.\, 80}{900} = 106{,}6.$$

Dieser Werth, resp. der nächst grössere ist in einer Profiltabelle aufzusuchen und das zugehörige Profil zu verwenden.

Nach einer solchen Tabelle ist ein passendes Profil, das von 160 mm Höhe, 74 mm Breite, 6,3 mm Stegdicke und 9,5 mm Rippendicke mit einem Widerstandsmoment von 118.

Beispiel 2. Der in derselben Weise belastete Träger soll von Gusseisen sein und kastenförmigen Querschnitt haben. Die vorgeschriebene Höhe ist 16 cm, die Wandstärke 1,4 cm. Es soll die Breite berechnet werden.



Nach Gl. 31 ist das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6}\left[BH^2 - b\,\frac{h^3}{H}\right].$$

Hier ist $H = 16$ cm, $h = 13{,}2$ cm, $b = (B - 2{,}8)$ cm, mithin

$$W = B\,\frac{16^2}{6} - (B - 2{,}8)\,\frac{13{,}2^3}{16\,.\,6} = B\left(\frac{256}{6} - \frac{2299{,}97}{96}\right)$$

$$+\,2{,}8\,\frac{2299{,}97}{96} = B\,(42{,}66 - 23{,}95) + 67{,}06.$$

Nach Gl. 22 ist das Widerstandsmoment

$$W = \frac{M}{k},$$

das Moment M war 1200 . 80 und für k sei 400 kg pro qcm gesetzt. Es folgt also

$$\frac{1200\,.\,80}{400} = B\,(42{,}66 - 23{,}95) + 67{,}06 = B\,.\,18{,}71 + 67{,}06,$$

daraus

$$B = \frac{240 - 67{,}06}{18{,}71} = 9{,}25 \text{ cm}.$$

Beispiel 3. Eine in der Mitte mit P belastete, an den Enden aufliegende schmiedeeiserne Achse von kreisförmigem Querschnitt soll mit Rücksicht auf die Bedingung berechnet werden, dass die Durchbiegung nicht grösser als der tausendste Theil der Länge ist.

Nach Gl. 65 ist die Durchbiegung

$$y_{max.} = \frac{P}{EJ}\,\frac{l^3}{48},$$

darin ist

$$J = \frac{d^4\pi}{64},$$

$E = 20000$ pro qmm und demnach

$$0{,}001\,l = \frac{Pl^3\,.\,64}{20000\,.\,48\,.\,d^4\pi},$$

woraus man erhält

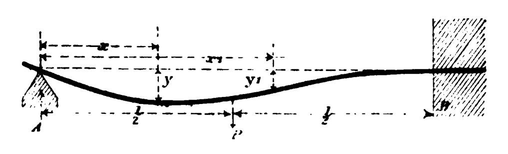
$$d = \sqrt[4]{\frac{Pl^2\,.\,64}{20000\,.\,48\,.\,\pi\,.\,0{,}001}} = 0{,}382\,\sqrt[4]{Pl^2} = 0{,}382\,\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}.\text{*)}$$

*) l ist in mm ausgedrückt, einzusetzen.

Für $l = 2$ m und $P = 2000$ kg ist z. B.

$$d = 0{,}382 \sqrt{2000}\ \sqrt[4]{2000} = 0{,}382 \cdot 45 \cdot 6{,}7 = 115{,}2 \text{ mm.}$$

4. Der Stab ist an dem einen Ende fest eingeklemmt, am anderen Ende gestützt und in der Mitte mit P belastet.



In diesem Falle ist zur Bestimmung der Reaction A und der Momente zunächst die Behandlung der elastischen Linie nöthig.

Diese besteht, wie beim vorigen Fall, aus zwei Theilen links und rechts vom Belastungspunkt.

Für den linken Theil ist

$$M_x = Ax$$

oder

$$\pm EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Ax$$

und

$$\pm EJ \frac{dy}{dx} = A \frac{x^2}{2} + C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{I}$$

$$\pm EJy\ A \frac{x^3}{6} + Cx + C_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Für den rechten Theil ist

$$M_{x_1} = Ax_1 - P\left(x_1 - \frac{l}{2}\right)$$

oder

$$\pm EJy \frac{d^2y_1}{dx_1{}^2} = Ax_1 - Px_1 + P\frac{l}{2}$$

und integrirt

$$\pm EJ \frac{dy_1}{dx_1} = A\frac{x_1{}^2}{2} - P\frac{x_1{}^2}{2} + P\frac{l}{2}x_1 + D \quad \ldots \quad \text{III.}$$

$$\pm EJy_1 = A\frac{x_1{}^3}{6} - P\frac{x_1{}^3}{6} + P\frac{l}{4}x_1{}^2 + Dx_1 + D_1 \,. \quad \text{IV.}$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten ergeben sich folgende Bedingungen:

1. für $x = o$ ist $y = o$,
2. für $x_1 = l$ ist $y_1 = o$,
3. für $x_1 = l$ ist $\frac{dy_1}{dx_1} = o$, . . .

4. und 5. für $x = x_1 = \frac{l}{2}$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ und $y = y_1$.

Aus Gl. II und der ersten Bedingung folgt

$$C_1 = o.$$

Aus Gl. III und der dritten Bedingung folgt

$$o = A\frac{l^2}{2} - P\frac{l^2}{2} + P\frac{l^2}{2} + D,$$

$$D = -A\frac{l^2}{2}.$$

Aus Gl. IV folgt mit Einsetzung dieses Werthes und mit der zweiten Bedingung

$$D_1 = -\frac{Al^3}{6} - \frac{Pl^3}{12} + \frac{Al^3}{2},$$

$$D_1 = A\frac{l^3}{3} - P\frac{l^3}{12}.$$

Mit Einsetzung der Werthe für D und D_1 lauten die Gleichungen für den rechten Theil

$$\pm EJ\frac{dy_1}{dx_1} = A\frac{x_1{}^2}{2} - P\frac{x_1{}^2}{2} + P\frac{l}{2}x_1 - A\frac{l^2}{2} \quad \ldots \quad \text{V}$$

$$\pm EJy_1 = A\frac{x_1{}^3}{6} - P\frac{x_1{}^3}{6}$$

$$+ P\frac{l}{4}x_1{}^2 - A\frac{l^2}{2}x_1 + A\frac{l^3}{3} - P\frac{l^3}{12} \quad \ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

Nach der vierten Bedingung ist für $x = x_1 = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$; aus Gl. I und Gl. V folgt also

$$A\frac{l^2}{8} + C = A\frac{l^2}{8} - P\frac{l^2}{8} + P\frac{l^2}{4} - A\frac{l^2}{2},$$

$$C = P\frac{l^2}{8} - A\frac{l^2}{2}.$$

Nach der fünften Bedingung folgt ebenso durch Gleichsetzung der Gleichungen II und VI und durch Einsetzen des Werthes $\frac{l}{2}$ für x und x_1

$$C = -P\frac{l^2}{12} + A\frac{l^2}{6}.$$

Aus den beiden Werthen für C erhält man durch Subtraction derselben

$$A = \frac{5}{16}P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 66$$

und durch Einsetzung dieses Werthes in eine der Gleichungen

$$C = -P\frac{l^2}{32}.$$

Für den linken Theil des Trägers erhält man demnach

$$\pm EJy = \frac{5}{16}P\frac{x^3}{6} - P\frac{l^2}{32}x$$

und die Durchbiegung (— Vorzeichen gilt, der concaven Krümmung wegen)

$$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{32}\left[\frac{x}{l} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 67.$$

Für die Stelle der Maximaldurchbiegung als Scheitelpunkt der elastischen Linie ist $\frac{dy}{dx} = o.$

$\frac{dy}{dx}$ ist der Differenzialquotient von y, also ist

$$\frac{1}{l} - 5\frac{x^2}{l^3} = o,$$

daraus

$$x = l\sqrt{\frac{1}{5}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 68$$

die Abscisse für den Punkt der grössten Durchbiegung. Diese selbst erhält man durch Einsetzung des Werthes von x in die Gl. 67.

Das Moment für einen beliebigen Punkt der linken Seite ist

$$M_x = Ax = \frac{5}{16}Px,$$

für einen beliebigen Punkt der rechten Seite

$$M_{x_1} = Ax_1 - P\left(x_1 - \frac{l}{2}\right) = \frac{5}{16}Px_1 - P\left(x_1 - \frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2}\left(l - \frac{11}{8}x_1\right).$$

Für die Belastungsstelle ist

$$x = \frac{l}{2},$$

also das Moment

$$M = \frac{5}{32}Pl.$$

Für die Befestigungsstelle ist

$$x_1 = l,$$

also das Moment

$$M_1 = \frac{P}{2}\left(l - \frac{11}{8}l\right) = -\frac{3}{16}Pl.$$

Da an jeder anderen Stelle das Moment ohne Rücksicht auf das

Vorzeichen kleiner ist, als das Letztere, so liegt das Maximalmoment an der Befestigungsstelle B und es ist

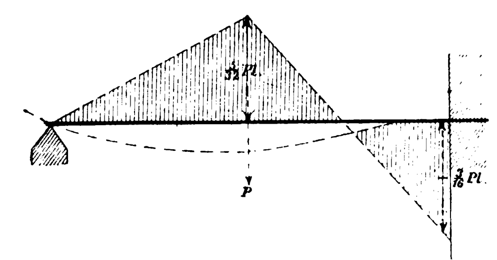
$$M_{max.} = -\frac{3}{16} Pl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 69.$$

Zur Berechnung der Tragfähigkeit, der Querschnittsdimensionen oder der Beanspruchung hat man also die Gleichung

$$\frac{3}{16} Pl = Wk \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70.$$

Wenn man für eine grössere Anzahl Punkte die Momente nach den Gleichungen für M_x und M_{x1} berechnet, die Werthe durch eine Maasseinheit, z. B. Millimeter, ausdrückt und in den zugehörigen Punkten vertical aufträgt, so giebt die Verbindung der Endpunkte der verticalen Strecken hier gerade Linien und die eingeschlossene schraffirte Fläche ist die Momentenfläche, die Begrenzungslinie ist die mentencurve.

Wegen der verschiednen Vorzeichen von M und M_x muss an einem bestimmten Punkt das Moment den Werth Null haben, die Momentencurve muss daher durch Null hindurchgehen.



An dieser Stelle ist also

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} = \left(\frac{M_{x_1}}{EJ}\right) = o.$$

Diese Gleichung sagt nach der analytischen Geometrie, dass an dem Punkte ein Wendepunkt der elastischen Linie liegt, ein Punkt also, in dem die concave in die convexe Krümmung übergeht.

Es folgt der allgemeine Satz:

Ein Wendepunkt der elastischen Linie liegt da, wo das Moment gleich Null ist.

Die Entfernung des Wendepunktes von A ist demnach leicht zu bestimmen dadurch, das man $M_{x_1} = o$ setzt, also

$$\frac{P}{2}\left(l - \frac{11}{8} x_1\right) = o, \text{ woraus } x_1 = \frac{8}{11} l.$$

5. Derselbe Fall mit dem Unterschied, dass die Kraft P an einer beliebigen Stelle in der Entfernung a von A und in der Entfernung b von B angreift.

Durch ganz ähnlichen Entwicklungsgang, bei dem die 4. und 5. Bedingung aber lautet: Für $x = x_1 = a$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ und $y = y_1$

erhält man die Reaction

$$A = \frac{Pb^2}{2\,l^2}\left[3 - \frac{b}{l}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 71.$$

Mit dieser Reaction ist dann das Moment an einer beliebigen Stelle der linken Seite

$$M_x = Ax,$$

an einer beliebigen Stelle der rechten Seite

$$M_x = Ax_1 - P\,(x_1 - a).$$

An der Belastungsstelle ist das Moment

$$M = Aa = \frac{P\,a\,b^2}{2\,l^2}\left[3 - \frac{b}{l}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad 72.$$

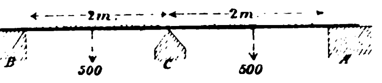
An der Befestigungsstelle

$$M_1 = Al - Pb = \frac{Pb^2}{2\,l}\left[3 - \frac{b}{l}\right] - Pb \quad \ldots \ldots \quad 73.$$

Das grössere von beiden muss das Maximalmoment sein, nach welchem der Stab zu berechnen ist. Beide Momente werden gleich gross, wenn $b = 0{,}585\ l$ ist.

Beispiel. Ein rechteckiger Balken von Fichtenholz liegt auf 3 Stützpunkten, deren Entfernung je 2 m beträgt. In der Mitte zwischen je 2 Stützpunkten ist der Balken mit 500 kg belastet. Es soll der Querschnitt und die Durchbiegung berechnet werden.

Ueber dem mittleren Stützpunkt kann der Balken als fest eingeklemmt angesehen werden, denn die Neigung $\frac{dy}{dx}$ der elastischen Linie ist an dieser Stelle gleich Null.



Es ist also nach Gl. 69 das Maximalmoment im Punkte C

$$M = \frac{3}{16}\,Pl = \frac{3}{16}\,500\,.\,200.$$

Nach der Gleichung $M = Wk$ ist, mit $k = 80$ kg, das Widerstandsmoment

$$W = \frac{3}{16}\,\frac{500\,.\,200}{80} \text{ oder } \frac{b\,h^2}{6} = \frac{3}{16}\,\frac{500\,.\,200}{80}.$$

Der Balken wird aus einem runden Stamm gehauen und es ist wegen bester Ausnützung des Materials festzustellen, welches Verhältniss von $\frac{b}{h}$ das Widerstandsmoment und somit die Tragfähigkeit bei bestimmtem Durchmesser d zu einem Maximum macht.

Es soll $W = \frac{b\,h^2}{6}$ ein Maximum werden. Die

Diagonale des Rechtecks ist d und es ist

$$h^2 = d^2 - b^2, \text{ somit } W = \frac{1}{6} b\,(d^2 - b^2).$$

Der Werth wird Maximum, wenn man ihn nach der Veränderlichen b differenziirt, den Differenzialquotienten = Null setzt und daraus b bestimmt. Man erhält so

$$d^2 - 3b^2 = o.$$

Es ist aber

$$d^2 = h^2 + b^2.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes für d^2 folgt

$$2b^2 = h^2 \text{ oder } \frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

woraus

$$b \backsim 0{,}7\,h.$$

Die Festigkeitsgleichung lautet also nun

$$W = \frac{0{,}7\,h^3}{6} = \frac{3\,.\,500\,.\,200}{16\,.\,80},$$

woraus

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\,.\,500\,.\,200\,.\,6}{16\,.\,80\,.\,0{,}7}} = \sqrt[3]{2009} \backsim 13 \text{ cm.}$$

Die Breite des Querschnittes ist $b = 0{,}7\,.\,13 = 9{,}1$ cm.

Der Durchmesser des runden Stammes

$$d = \sqrt{13^2 + 9{,}1^2} = \sqrt{251{,}8} = 15{,}86 \text{ cm.}$$

Die grösste Durchbiegung findet statt in der Entfernung von A und B nach Gl. 68

$$x = l\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{200}{2{,}236} = 89{,}4.$$

Nach Gl. 67 ist die grösste Durchbiegung

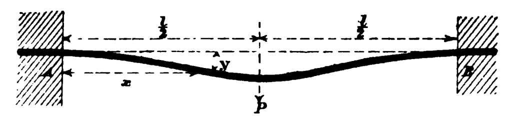
$$y = \frac{500}{110\,000\,\frac{9{,}1\,.\,13^3}{12}} \cdot \frac{200^3}{32}\left[\frac{89{,}4}{200} - \frac{5}{3}\,\frac{89{,}4^3}{200^3}\right]$$

$$= 0{,}68\,.\,0{,}298 \backsim 0{,}2 \text{ cm.}$$

6. Der Stab ist an beiden Enden fest eingeklemmt und trägt in der Mitte die Last P.

Die Einklemmung kann man sich ersetzt denken durch ein Moment M′ an jedem der beiden Stabenden, welches bewirkt, dass die Stabaxe in den Einklemmungspunkten horizontal gerichtet ist. Wenn man von der Belastung durch P vorläufig ganz absieht, würden diese beiden Momente den Stab in der Weise des auf Seite 50 behandelten Falles

beanspruchen, d. h. das Moment M′ ist zwischen den Einklemmungspunkten constant, es erzeugt also in den Faserschichten constante Spannungen. Diese Spannungen addiren sich zu denen, die durch das in jedem Querschnitt von der Kraft P erzeugte Moment herrühren. Da die Spannungen proportional den Momenten sind, so kann man anstatt jener auch die Momente addiren. Es ist demnach das resultirende Moment an einer beliebigen



Stelle mit Rücksicht darauf, dass Reaction $A = B = \frac{P}{2}$ ist:

$$M = \frac{P}{2}x + M'.$$

Nach Gl. 52 folgt

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = P\frac{x^2}{4} + M'x + C,$$

da $\frac{dy}{dx} = o$ ist, für $x = o$, so folgt hieraus $C = o$.

Für $x = \frac{l}{2}$ ist ebenfalls $\frac{dy}{dx} = o$, es folgt also aus derselben Gleichung

$$P\frac{l^2}{16} + M'\frac{l}{2} = o \text{ und } M' = -P\frac{l}{8}.$$

Mit Einsetzung dieses Werthes ist

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = P\frac{x^2}{4} - Px\frac{l}{8}$$

und

$$\pm EJy = P\frac{x^3}{12} - P\frac{x^2 l}{16} + C_1.$$

Für $x = o$ ist $y = o$, demnach $C_1 = o$ und mit Rücksicht auf die concave Durchbiegung folgt

$$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{16}\left[\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (74)$$

Für die Mitte ist $x = \frac{l}{2}$, mithin ist die Maximaldurchbiegung

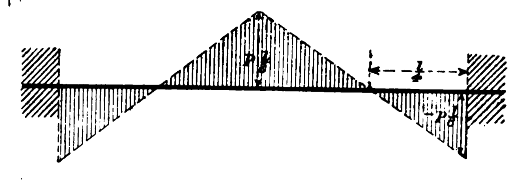
$$y_{max.} = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{16}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{192} \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

In den Punkten A und B ist das Moment $-P\frac{l}{8}$, im Belastungspunkt ist mit $x = \frac{l}{2}$:

$$M = P\frac{l}{4} - P\frac{l}{8} = P\frac{l}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76a)$$

und für die, den 3 Punkten entsprechenden Querschnitte

$$P\frac{l}{8} = Wk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$



In den Wendepunkten ist das Moment gleich Null, mithin

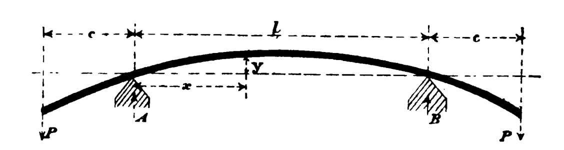
$$\frac{P}{2}x - P\frac{l}{8} = o,$$

woraus

$$x = \frac{l}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Momentenfläche und Momentencurve sind in obenstehender Figur dargestellt.

7. An den auf 2 Stützen aufliegenden Stab greifen ausserhalb der beiden Stützen in gleicher Entfernung von diesen die gleich grossen Kräfte P an.



Die Reactionen sind $A = P$ und $B = P$. Das Moment an einer beliebigen Stelle in der Entfernung x vom Stützpunkt A ist $M = -P(c + x) + Px = -Pc$. Zwischen den Stützpunkten A und B ist demnach das Moment constant gleich $-Pc$. Für die Tragfähigkeit ist also nach der Gleichung $M = Wk$:

$$Pc = Wk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Nach Gl. 20 ist der Krümmungsradius $\varrho = \frac{EJ}{M}$, derselbe ist also zwischen A und B constant, d. h. die elastische Linie ist ein Kreisbogen.

Zur Bestimmung der Durchbiegung ist

$$\pm EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Pc.$$

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = -Pcx + C.$$

$$\pm EJy = -Pc\frac{x^2}{2} + Cx + C_1.$$

Für $x = o$ ist $y = o$, demnach $C_1 = o$.

Für $x = \frac{l}{2}$ ist $\frac{dy}{dx} = o$, demnach $C = Pc\,\frac{l}{2}$

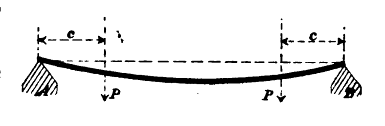
und die Durchbiegung

$$y = \frac{P}{EJ}\left[cx\,\frac{l}{2} - c\,\frac{x^2}{2}\right] = \frac{P}{EJ}\,\frac{l^2 c}{2}\left[\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right] \quad . \quad . \quad (79)$$

Für die Mitte zwischen A und B ist $x = \frac{l}{2}$, womit man erhält

$$y_{max.} = \frac{1}{8}\,\frac{P}{EJ}\,.\,l^2 c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

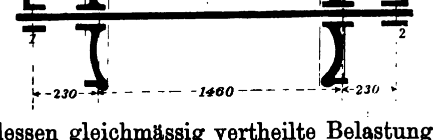
8. Die Belastungspunkte liegen innerhalb der Stützpunkte.



In diesem Fall ist das Moment an jeder Stelle zwischen den Belastungspunkten constant gleich Pc und y erhält denselben Werth, nur mit negativem Vorzeichen.

Die Momentenfläche ist für beide Fälle ein Trapez.

Beispiel. Die Radachse für einen Tender ist nach nebenstehenden Angaben belastet. Es soll der Durchmesser der Zapfen bei 1 und 2 und der Durchmesser der Achse nur mit Rücksicht auf die Biegungsbeanspruchung berechnet werden.



Der Zapfendurchmesser sei d, die Länge desselben $l = 2{,}25\ d$.

Das Moment am Zapfen, dessen gleichmässig vertheilte Belastung man in der Mitte seiner Länge concentrirt annehmen kann, ist

$$M = 4900\,\frac{l}{2}\,.$$

Nach der Gleichung $M = Wk$ ist nun

$$4900\,\frac{l}{2} = \frac{d^3\pi}{32}\,k,\quad d^2 = 4900\,\frac{32}{2}\,\frac{l}{d}\,\frac{1}{k\pi}\,.$$

Entsprechend der Belastungsweise unter c, siehe Tabelle Seite 5, ist für Gussstahl $k = 5$ kg pro qmm zu setzen und $\frac{l}{d}$ ist 2,25. Es ist also

$$d = \sqrt{\frac{16}{\pi\,.\,5}\,2{,}25\,.\,4900} = 105 \text{ mm.}$$

Die Länge $l = 2{,}25 \,.\, 105 = 236$ mm.

Für den Schaft der Achse ist, entsprechend $M = Wk$,

$$4900 \,.\, 230 = \frac{D^3 \pi}{32} k,$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{4900 \,.\, 230 \,.\, 32}{\pi \,.\, 5}} \backsim 132 \text{ mm.}$$

Der Einfluss der Centrifugalkraft beim Durchfahren von Curven und der Schwankungen des Wagens erfordert eine geringe Vergrösserung der berechneten Durchmesser.

Beispiel 2. An einem an den Enden frei aufliegenden 5 m langen Träger von I Eisen hängt eine Last von 9000 kg auf jeder Seite, 1 m vom Stützpunkt entfernt. Das Profil hat eine Höhe von 360 mm, eine Breite von 143 mm, eine Stegdicke von 13 mm und die Rippenstärke ist 19,5 mm. Es soll die Beanspruchung pro qcm und die Durchbiegung berechnet werden, ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes.

Das Maximalmoment ist

$$M = 9000 \,.\, 100 = 900\,000 \text{ kgcm.}$$

Das Widerstandsmoment nach Gl. 31

$$W = \frac{1}{6}\left(BH^2 - b\,\frac{h^3}{H}\right),$$

$$W = \frac{1}{6}\left(14{,}3 \,.\, 36^2 - 13\,\frac{32{,}1^3}{36}\right) = \frac{1}{6}\left(14{,}3 \,.\, 1296 - 13\,\frac{33076{,}2}{36}\right)$$
$$= 1098.$$

Nun ist

$$k = \frac{M}{W} = \frac{900\,000}{1098} = 820 \text{ kg.}$$

Die grösste Durchbiegung ist nach Gl. 80

$$y = \frac{1}{8}\,\frac{P}{EJ}\,l^2\,c, \text{ darin ist } c = 100 \text{ cm, } l = 500 \text{ cm,}$$

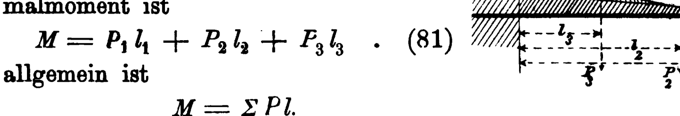
$$J = W \,.\, \frac{H}{2} = 1098 \,.\, 18 = 19\,764,\; E = 2\,000\,000,$$

mithin ist

$$y = \frac{1}{8}\,\frac{9000 \,.\, 250\,000 \,.\, 100}{2\,000\,000 \,.\, 19\,764} = 0{,}71 \text{ cm} = 7{,}1 \text{ mm.}$$

9. Der an einem Ende befestigte Stab ist mit mehreren Einzelkräften belastet.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Befestigungsstelle und das Maximalmoment ist



$$M = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 \quad . \quad (81)$$

allgemein ist

$$M = \Sigma P l.$$

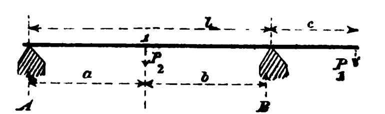
Für die Tragfähigkeit ist

$$M = Wk.$$

Die Fläche des Gesammtmomentes ist zusammengesetzt aus den Flächen der einzelnen Momente, wie aus der Figur zu ersehen.

10. Der Stab ist zwischen den Stützpunkten und ausserhalb derselben belastet.

Zur Bestimmung der Reactionen A und B in den Stützpunkten A und B sind die Momentengleichungen aufzustellen.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } A \text{ als Drehpunkt ist } P_1 (l + c) + P_2 a = Bl, \\ \quad \text{woraus Reaction } B = \dfrac{P_1 (l + c) + P_2 a}{l} \quad . \quad . \\ \text{Für } B \text{ als Drehpunkt ist } P_1 c + Al = P_2 b, \\ \quad \text{woraus Reaction } A = \dfrac{P_2 b - P_1 c}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (82)$$

Wird A negativ, so ist der Stützpunkt A nach oben zu legen. Der gefährliche Querschnitt liegt in diesem Falle bei B, im anderen Falle beim Belastungspunkt 1.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Das Momont bei } B \text{ ist} \\ \quad M = P_1 c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \text{Das Moment bei 1 ist} \\ \quad M_1 = P_1 (c + b) - Bb = Aa \quad . \quad . \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

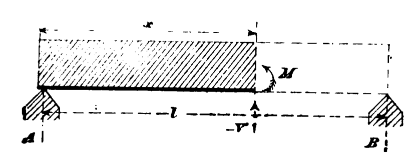
Die Durchbiegung des überragenden Endes kann man leicht berechnen, wenn man dasselbe als einen bei B eingespannten Freiträger betrachtet nach Gl. 58. Die Durchbiegung des Stückes zwischen A und B würde nach Gl. 67 zu berechnen sein, wenn die Last P_2 in der Mitte zwischen A und B angreift. In derselben Weise sind alle derartigen Fälle zu behandeln.

Gleichmässig belasteter Stab.

Allgemeine Betrachtung des in seiner ganzen Länge gleichmässig belasteten Stabes.

Die durch das Eigengewicht oder durch aufliegende Last oder durch beide zugleich bewirkte Belastung sei mit Q bezeichnet, der auf die Längeneinheit entfallende Theil mit q.

Denkt man sich ein Stück des belasteten Stabes abgeschnitten, so müsste, wenn der Gleichgewichtszustand und der Spannungszustand erhalten bleiben soll, eine Verticalkraft — V von unten nach oben wirkend angebracht werden und ein Moment M, welches gleich dem Moment der inneren Spannungen ist.



Die Verticalkraft an irgend einer Stelle in der Entfernung x von A ist gleich der algebraischen Summe aller längs der Strecke auf- und abwärts gerichteten Kräfte. Die abwärts gerichtete Kraft ist veränderlich mit der Veränderung von x, und da $q \,.\, dx$ die Belastung längs einer unendlich kleinen Strecke dx ist, so ist die Belastung einer endlichen Strecke ausgedrückt durch

$$\int_0^x q\,dx.$$

Die aufwärts gerichtete Reaction A ist constant, sie ist also, wenn man das Integral als ein unbestimmtes schreibt, dessen Integrationsconstante, und es ist demnach die Verticalkraft

$$V = \int q\,dx.$$

Das Moment der inneren Spannungen muss gleich der Summe der Momente der äusseren Kräfte sein. Die äusseren Kräfte sind (siehe Figur): die Belastung der Strecke x, die Kraft — V und die Reaction A. Das Moment der letzteren ist Null, wenn Punkt A der Drehpunkt des Momentes ist. Das Moment von — V ist — $V \,.\, x$ und das Moment eines unendlich kleinen Theiles der Belastung von der Länge dx im Abstand x von A ist $q\,dx \,.\, x$. Das Moment der ganzen Belastung längs der Strecke x ist die Summe dieser, also

$$\Sigma\, q\,dx\,x \text{ oder } \int_0^x x\,q\,dx.$$

Es ist also das Gesammtmoment

$$M = \int_0^x x\,q\,dx - Vx.$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung differenziirt, so folgt

$$dM = x\,q\,dx - V dx - x\,dV$$

oder

$$\frac{dM}{dx} = x\,q - V - x\,\frac{dV}{dx},$$

$$\text{da } V = \int q\,dx \text{ ist, so ist } \frac{dV}{dx} = q$$

und es bleibt

$$\frac{dM}{dx} = -V.$$

Nach dem bekannten Satze: Wenn man den Differenzialquotienten einer veränderlichen Grösse gleich Null setzt, so erhält man daraus das Maximum der Grösse, ist demnach M ein Maximum für $V = 0$ und es gilt allgemein die Regel:

Das Maximalmoment liegt da, wo die Verticalkraft gleich Null ist.

Wenn also das Gesetz der Belastung, für gleichmässige Belastung z. B. $q = \frac{Q}{l}$, gegeben ist, so ist nach Obigem die Verticalkraft in einem beliebigen Querschnitt in der Entfernung x von A

$$V = \int q\,dx \quad \text{. . . . . (84)}$$

und das Moment nach der Gl. $\frac{dM}{dx} = -V$:

$$M = \int -V dx \quad \text{. . . . . (85)}$$

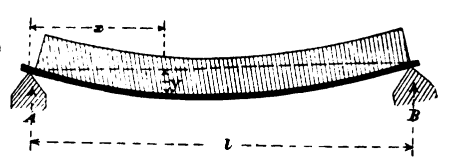
Mit Anwendung der Gl. 52, $M = \pm EJ\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält man dann die Durchbiegung y.

Die Anwendung der Gleichungen ist in folgenden speciellen Fällen gezeigt.

1. Der an den Enden gestützte Stab ist gleichmässig belastet.

Ist Q die ganze Belastung, so ist die Belastung einer Strecke gleich der Längeneinheit:

$$q = \frac{Q}{l}.$$



Nach Gl. 84 ist die Verticalkraft an einer Stelle in der Entfernung x von A

$$V = \int q\,dx = \int \frac{Q}{l}\,dx = Q\frac{x}{l} + C.$$

Die Integrationsconstante C hat an jeder Stelle den gleichen Werth. Im Stützpunkt A ist $x = o$, es folgt also $C = V_0$ und da die Verticalkraft V_0 im Stützpunkt A gleich der von unten nach oben gerichteten Reaction $\frac{Q}{2}$ ist, so folgt $C = -\frac{Q}{2}$ und

$$V = Q\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

Nach Gl. 85 ist das Moment an der fraglichen Stelle

$$M = \int - V\,dx = \int Q\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)dx = \frac{Q}{2}x - Q\frac{x^2}{2l} + C_1.$$

Am Stützpunkt, mit $x = o$, ist $M = o$, demnach $C_1 = o$ und

$$M = \pm\,EJ\frac{d^2y}{dx^2} = Q\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2l}\right) \quad \ldots \ldots \quad (87)$$

ferner ist

$$\pm\,EJ\frac{dy}{dx} = Q\frac{x^2}{4} - Q\frac{x^3}{6l} + C_2$$

und

$$\pm\,EJy = Q\frac{x^3}{12} - Q\frac{x^4}{24l} + C_2 x + C_3.$$

Für $x = o$, also für Punkt A, ist die Durchbiegung $y = o$, es ist demnach $C_3 = o$. Für $x = l$, also für Punkt B, ist $y = o$, es folgt hiermit aus der letzten Gleichung

$$C_2 = Q\frac{l^2}{24} - Q\frac{l^2}{12} = -Q\frac{l^2}{24}.$$

Mit Einsetzung dieses Werthes und mit Rücksicht auf die concave Krümmung, für die das negative Vorzeichen gilt, folgt die Durchbiegung

$$y = \frac{Q}{EJ}\,\frac{l^3}{24}\left[\frac{x^4}{l^4} - \frac{x^3}{2\,l^3} + \frac{x}{l}\right] \quad \ldots \ldots \quad (88)$$

Die grösste Durchbiegung in der Mitte für $x = \frac{l}{2}$ folgt mit Einsetzung dieses Werthes

$$y_{max.} = \frac{5}{384}\,\frac{Ql^3}{EJ} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (89)$$

Das Maximalmoment liegt da, wo die Verticalkraft gleich Null ist. Nach Gl. 86 ist

$$V = Q\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right) = o \text{ für } x = \frac{l}{2}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also in der Mitte zwischen A und B und das Moment an dieser Stelle ist nach Gl. 87

$$M_{max} = Q\left(\frac{l}{4} - \frac{l^2}{8l}\right) = Q\frac{l}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

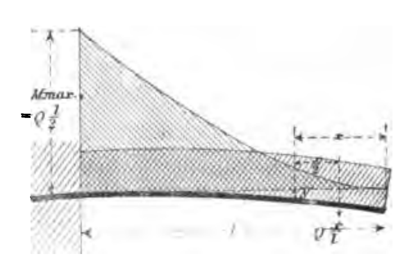
Für die Tragfähigkeit ist

$$Q\frac{l}{8} = Wk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

Die Momentenfläche ist von einer Parabel begrenzt, deren Scheitel über der Mitte des Stabes liegt.

2. Der gleichmässig belastete Stab ist an einem Ende fest eingeklemmt, am anderen frei.

Ohne Anwendung der Gleichungen 84 und 85 lässt sich in diesem, sowie auch im vorigen Falle die Gleichung für die Verticalkraft und für das Moment direct aufstellen.



Am freien Ende ist V und auch $M = o$, beide wachsen bis zu einem Maximum an der Einklemmungsstelle. Die Verticalkraft in einem Punkte in der Entfernung x vom freien Ende ist gleich der Summe aller Verticalkräfte längs der Strecke x und diese ist hier gleich qx und da $q = \frac{Q}{l}$ ist, so ist

$$V = Q\frac{x}{l}.$$

Das Moment ist das Product aus Kraft und Hebelarm. Die Kraft längs der Strecke x ist die Belastung derselben $Q\frac{x}{l}$, und diese kann man sich im Schwerpunkt concentrirt angreifend denken. Die Entfernung des Schwerpunktes von dem fraglichen Punkt, für den das Moment bestimmt werden soll, ist aber $\frac{x}{2}$, mithin ist

$$M = Q\frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} = Q\frac{x^2}{2l}.$$

Den grössten Werth l erhält x am Befestigungspunkt, es ist also

$$M_{max.} = Q \frac{l}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (92)$$

Die Momentencurve ist eine Parabel, deren Scheitel am freien Ende liegt.

Durch zweimalige Integration der Gleichung $\pm EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = Q \frac{x^2}{2l}$, wobei die Integrationsconstanten zu bestimmen sind nach den Bedingungen: Für $x = l$ ist $\frac{dy}{dx} = o$ und für $x = l$ ist $y = o$, erhält man die Gleichung für die Durchbiegung

$$y = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{24} \left[\frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x}{l} + 3 \right] \quad \ldots \ldots \quad (93)$$

Für die grösste Durchbiegung am freien Ende, also für $x = o$, folgt hieraus

$$y_{max.} = \frac{Q l^3}{8 EJ} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (94)$$

Für die Tragfähigkeit ist

$$Q \frac{l}{2} = Wk \quad \ldots \ldots \ldots \quad (95)$$

Beispiel 1. Ein an einem Ende eingemauerter 3 m langer Balken aus Fichtenholz ist am anderen Ende frei und in seiner ganzen Länge gleichmässig belastet. Der rechteckige Querschnitt ist 200 mm hoch, 150 mm breit. Wie gross darf die Belastung sein, mit Berücksichtigung des Eigengewichtes.

Das specifische Gewicht des Fichtenholzes ist $s = 0{,}4$, demnach ist das Gewicht

$$G = 0{,}4 \,.\, 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 30 = 36 \text{ kg.}$$

Ist die gleichmässig vertheilte Last mit dem ebenfalls gleichmässig vertheilten Eigengewicht Q, so ist nach Gl. 95

$$Q \frac{l}{2} = Wk = \frac{150 \,.\, 200^2}{6} \,.\, k,$$

k kann man 0,7 kg, pro qmm annehmen.

Man erhält nun $Q = \frac{150 \,.\, 40\,000 \,.\, 0{,}7 \,.\, 2}{6 \,.\, 3000} = 466{,}6$ kg.

Die Belastung ohne das Eigengewicht ist

$$Q_1 = 466{,}6 - 36 = 430{,}6 \text{ kg.}$$

Die grösste Durchbiegung nach Gl. 94 in Centimetermass

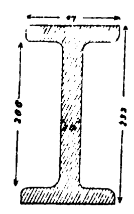
$$y = \frac{Q l^3}{8 EJ} = \frac{466{,}6 \,.\, 300^3}{8 \,.\, 120000 \,.\, \frac{15 \,.\, 20^3}{12}} = \frac{466{,}6 \,.\, 27000000 \,.\, 12}{3 \,.\, 120000 \,.\, 15 \,.\, 8000}$$

$$= 1{,}3 \text{ cm oder } 13 \text{ mm.}$$

Beispiel 2. Ein 4 m langer, an den Enden aufliegender schmiedeeiserner Träger von **I** Querschnitt ist mit 5700 kg gleichmässig belastet. Die Dimensionen des Querschnittes sollen berechnet werden.

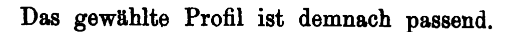
Nach Gl. 91 ist $Q\frac{l}{8} = Wk$, mit $k = 7{,}5$ kg ist die nöthige Grösse des Widerstandsmomentes

$$W = \frac{5700\ .\ 4000}{8\ .\ 7{,}5} = 380000.$$



Das Widerstandsmoment des in nebenstehender Figur dargestellten Profiles ist nach Gl. 31

$$W = \frac{1}{6}\left[97\ .\ 232^2 - 77\ .\ \frac{206^3}{232}\right] \sim 386000$$



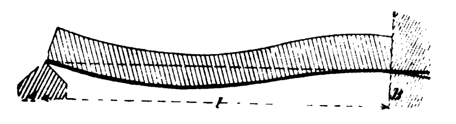
Das gewählte Profil ist demnach passend.

3. Der auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastete Stab ist an dem einen Ende eingeklemmt, an dem andern gestützt.

Die Belastung ist $Q = q\,l$.

Nach Gl. 84 ist

$$V = \int q\,dx = \int \frac{Q}{l}\,dx = \frac{Q}{l}\,x + C.$$



Da für $x = o$ die Verticalkraft $- V =$ der Reaction A ist, so folgt $- A = o + C$ und $C = - A$, es ist also

$$V = \frac{Q}{l}\,x - A.$$

Nach Gl. 85 ist

$$M = \int - V\,dx = \int \left(A - \frac{Q}{l}\,x\right) dx = Ax - Q\frac{x^2}{2l} + C_1.$$

Für $x = o$ ist

$$M = o,$$

damit folgt

$$C_1 = o$$

und

$$M = \pm EJ\frac{d^2y}{dx^2} = Ax - Q\frac{x^2}{2l},$$

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = A\frac{x^2}{2} - Q\frac{x^3}{6l} + C_2.$$

Für $x = l$ ist $\frac{dy}{dx} = o$,

also

$$C_2 = Q\frac{l^2}{6} - A\frac{l^2}{2}$$

und mit Einsetzung dieses Werthes folgt

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = A\frac{x^2}{2} - Q\frac{x^3}{6l} + Q\frac{l^2}{6} - A\frac{l^2}{2},$$

$$\pm EJy = A\frac{x^3}{6} - Q\frac{x^4}{24l} + Q\frac{l^2x}{6} - A\frac{l^2x}{2} + C_3 \quad . \quad . \quad (I)$$

Für $x = o$ ist $y = o$, es folgt damit $C_3 = o$. Für den Befestigungspunkt B, also für $x = l$, ist ebenfalls $x = o$, mithin folgt aus derselben Gleichung I

$$A\frac{l^3}{6} - Q\frac{l^3}{24} + Q\frac{l^3}{6} - A\frac{l^3}{2} = o$$

oder die Reaction

$$A = \frac{3}{8}Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Mit Einsetzung dieses Werthes folgt aus der Gleichung für V

$$V = Q\frac{x}{l} - \frac{3}{8}Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

und aus der Gleichung für das Moment

$$M = \frac{Q}{2}x\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Aus der Gleichung I folgt die Durchbiegung

$$y = \frac{Q}{EJ}\frac{l^3}{48}\left[2\frac{x^4}{l^4} - 3\frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Das Maximalmoment liegt da, wo $V = o$ ist.

Die Gleichung $V = Q\frac{x}{l} - \frac{3}{8}Q = 0$ wird erfüllt durch $x = \frac{3}{8}l$.

Mit Einsetzung dieses Werthes für x folgt

$$M_{max.} = \frac{Q}{2}\frac{3l}{8}\left(\frac{3}{4} - \frac{3l}{8l}\right) = \frac{9}{128}Ql \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

An der Einklemmungsstelle ist $x = l$, also nach Gl. 98 das Moment

$$M = Q\frac{l}{2}\left(\frac{3}{4} - 1\right) = -Q\frac{1}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Das letztere Moment ist grösser als das erstere, es ist der Begriff Maximalmoment also nur relativ zu verstehen zwischen Stützpunkt und Einklemmungspunkt.

Für die Tragfähigkeit ist

$$Q\frac{l}{8} = Wk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

Wendepunkt. Da die beiden Momente entgegengesetzte Vorzeichen haben, so muss zwischen beiden ein Moment mit dem Werthe Null liegen. Wie bekannt, ist aber da, wo das Moment Null ist, ein Wendepunkt. Die Entfernung des Wendepunktes von A folgt also aus der Gleichung

$$M = Q\frac{x}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right) = o \text{ mit } x = \frac{3}{4}l \quad \ldots \quad (103)$$

Die Durchbiegung ist da am grössten, wo die Neigung der Tangente $\frac{dy}{dx} = o$ ist, man erhält demnach die Entfernung der grössten Durchbiegung von A, wenn man die Gleichung für $\frac{dy}{dx} = o$ setzt.

$$\pm EJ\frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Q\frac{x^2}{6} - Q\frac{x^3}{6l} + Q\frac{l^2}{6} - \frac{3}{8}Q\frac{l^2}{2} = o,$$

hieraus folgt

$$\frac{x^3}{l^3} - \frac{9}{8}\frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{8} = o.$$

$x = l$ ist eine Wurzel dieser cubischen Gleichung und wenn man letztere durch $\frac{x}{l} - 1$ dividirt, so erhält man

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{8}\frac{x}{l} - \frac{1}{8} = o,$$

woraus

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{16} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{1}{8}} \text{ und } x = \frac{l}{16}\left(1 \pm \sqrt{33}\right). \quad (104)$$

Das negative Vorzeichen giebt einen unmöglichen Werth, es gilt also das positive.

Die grösste Durchbiegung erhält man durch Ausrechnung des Werthes für x und Einsetzung desselben in Gl. 99.

4. Der gleichmässig belastete Stab ist an beiden Enden horizontal eingeklemmt.

Der geringeren praktischen Wichtigkeit des Falles und der Aehnlichkeit der Herleitung mit den vorhergehenden wegen, seien nur die Resultate hier angegeben.

Die Gleichung für das Moment ist

$$M = Q \frac{l}{2} \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x}{l} - \frac{1}{6} \right].$$

In der Stabmitte, mit $x = \frac{l}{2}$, ist das Moment

$$M = Q \frac{l}{24},$$

an den Befestigungsstellen, mit $x = o$ und $x = l$, ist

$$M = -Q \frac{l}{12} \qquad (105)$$

Für die Tragfähigkeit ist

$$Q \frac{l}{12} = Wk \qquad (106)$$

Die grösste Durchbiegung in der Stabmitte ist

$$y = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{384} \qquad (107)$$

Aus der Geichung $M = Q \frac{l}{2} \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x}{l} - \frac{1}{6} \right] = o$ folgen die Entfernungen der beiden Wendepunkte von einem der Befestigungspunkte:

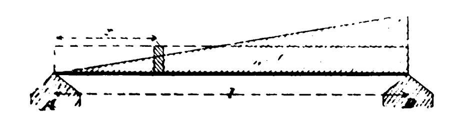
$$x = 0{,}2113\ l \text{ und } x = 0{,}7887\ l.$$

Ungleichmässig, aber stetig belasteter Stab.

Nach Aufstellung der Gleichung für die Belastung q pro Längeneinheit sind dieselben allgemeinen Gleichungen 81 und 82 anzuwenden wie bei dem gleichmässig belasteten Stab. Folgender Fall soll als Beispiel dienen.

Der an beiden Enden gestützte Stab trägt eine Belastung in Form eines Dreiecks.

Denkt man sich die Belastung Q gleichmässig vertheilt, so kommt auf eine Längeneinheit $q_1 = \frac{Q}{l}$. Wenn der schraffirte Streifen die Belastung q_1 darstellt, so entspricht das Stück desselben, das innerhalb des Dreiecks liegt, der wirklichen Belastung q pro Längeneinheit in der Entfernung x von A und es besteht die Proportion



$$q_1 : q = \frac{l}{2} : x, \text{ woraus } q = 2 q_1 \frac{x}{l}.$$

Nach Gl. 84 ist nun die Verticalkraft

$$V = \int q\,dx = \frac{2\,q_1}{l} \int x\,dx = \frac{q_1 x^2}{l} + C,$$

nach Gl. 85 ist das Moment

$$M = \int - V\,dx = - \frac{q_1 x^3}{3\,l} - Cx + C_1.$$

Für $x = o$ ist $M = o$, mithin $C_1 = o$; für $x = l$ ist ebenfalls $M = o$, mithin ist $- \frac{q_1 l^2}{3} - Cl = o$, woraus $C = - \frac{q_1 l}{3}$ und folglich

$$M = \frac{q_1 lx}{3} - \frac{q_1 x^3}{3\,l} = \frac{1}{3}\, q_1 lx \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Weil V für $x = o$ gleich C ist, so ist $C = \frac{q_1 l}{3}$ die Reaction A. Die Reaction B ist $\frac{2\,q_1 l}{3}$.

Nach Gl. 52 ist

$$\pm\, EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q_1 lx}{3} - \frac{q_1 x^3}{3\,l}$$

und

$$\pm\, EJ \frac{dy}{dx} = \frac{q_1 lx^2}{6} - \frac{q_1 x^4}{12\,l} + C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

$$\pm\, EJy = \frac{q_1 lx^3}{18} - \frac{q_1 x^5}{60\,l} + C_2 x + C_3.$$

Für $x = o$ ist $y = o$, demnach $C_3 = o$, für $x = l$ ist ebenfalls $y = o$, folglich ist nach der letzten Gleichung

$$C_2 = \frac{q_1 l^3}{60} - \frac{q_1 l^3}{18} = - \frac{7}{180}\, q_1 l^3.$$

Mit Einsetzung dieses Werthes folgt

$$\pm\, EJy = \frac{q_1 lx^3}{18} - \frac{q_1 x^5}{60\,l} - \frac{7}{180}\, q_1 l^3 x$$

und

$$y = \frac{q_1}{180\, EJ} \frac{x}{l} \left[7\, l^4 + 3 x^4 - 10\, l^2 x^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

y wird zum Maximum an der Stelle, wo $\frac{dy}{dx} = o$ ist, wo also nach Gl. I

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_1}{180\, EJl} \left[30\, l^2 x^2 - 15\, x^4 - 7\, l^4\right] = o \text{ ist.}$$

Hieraus folgt

$$x = l\sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} = 0{,}5193\, l.$$

Nach Gl. 109 ergiebt sich hiermit die grösste Durchbiegung, wenn man zugleich für q_1 den Werth $\frac{Q}{l}$ setzt:

$$y_{max.} = 0{,}01304\, \frac{Q\, l^3}{E J} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (110)$$

Das Maximalmoment liegt da, wo

$$V = \frac{q_1\, x^2}{l} - \frac{q_1\, l}{3} = o,$$

woraus

$$x = l\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$M_{max.} = \frac{1}{3}\, q_1\, l^2 \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 0{,}1283\, q_1\, l^2$$

$$= 0{,}1283\, Q l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

Stab auf mehr als zwei Stützen.

Der Stab liegt auf drei gleichhohen Stützen auf und ist in der Mitte zwischen denselben mit P belastet.

Jede der beiden Hälften des Stabes kann man als einen an einem Ende eingeklemmten, am anderen Ende gestützten Stab auffassen, denn über der Mittelstütze ist der Zustand des Stabes genau so wie bei jenem am befestigten Ende. y und $\frac{dy}{dx}$ sind bei beiden gleich Null.

Nach Gl. 66 ist die Reaction oder der Stützendruck

$$A = B = \frac{5}{16}\, P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (112)$$

Der Stützendruck in C muss dann sein

$$C = \frac{32}{16}\, P - \frac{10}{16}\, P = \frac{22}{16}\, P = 1{,}375\, P \quad . \; . \; . \; . \quad (113)$$

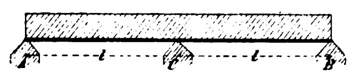
Ueber der Stütze C ist nach Gl. 69 das Maximalmoment

$$M_{max.} = -\frac{3}{16}\, P l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (114)$$

Die Momente an den Belastungsstellen sind

$$M = \frac{5}{32} Pl.$$

Der auf drei Stützen liegende Stab ist gleichmässig belastet.



Ist $Q = ql$ die Belastung eines Feldes, so ist bei derselben Auffassung die Reaction nach Gl. 96

$$A = B = \frac{3}{8} Q = \frac{3}{8} ql \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

Der Stützendruck in C muss dann sein

$$C = \frac{16}{8} Q - \frac{6}{8} Q = \frac{10}{8} Q = \frac{10}{8} ql \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Das Maximalmoment über C nach Gl. 101

$$M_{max.} = -\frac{1}{8} Ql = -\frac{1}{8} ql^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

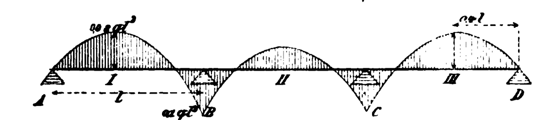
Die relativen Maximalmomente zwischen den Stützen sind nach Gl. 100

$$M = \frac{9}{128} Ql = \frac{9}{128} ql^2$$

und zwar in der Entfernung $\frac{3}{8} l$ von A und B. Durch eine Senkung der Mittelstütze um $\delta = 0{,}131 \frac{ql^4}{EJ}$ kann die Tragfähigkeit um fast das $1\frac{1}{2}$fache vergrössert werden.

Die weitere Behandlung des sogenannten continuirlichen Trägers oder des Stabes auf mehreren Stützen soll hier, als über das Ziel des Buches hinausgehend, übergangen werden. Es seien nur noch die Reactionen und die Momente eines Trägers mit 4 und eines mit 5 Stützen bei gleichmässiger Belastung angegeben. Die Reactionen sind

$$A = \frac{4}{10} ql, \; B = \frac{11}{10} ql, \; C = \frac{11}{10} ql, \; D = \frac{4}{10} ql.$$



Die Momente sind

$$M_I = M_{III} = 0{,}08\, ql^2,\ M_{II} = \frac{1}{40}\, ql^2,\ M_B = M_C = -0{,}1\, ql^2.$$

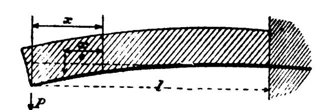
Bei dem Träger auf 5 Stützen $ABCDE$ sind die Reactionen $A = E = 0{,}392\, ql,\ B = D = 1{,}143\, ql,\ C = 0{,}9286\, ql.$

Die Momente $M_B = M_D = -0{,}1071\, ql^2,\ M_C = -0{,}0714\, ql^2$, zwischen den Stützen A und B und D und E sind die grössten Momente $0{,}0772\, ql^2$.

Gleichmässig und mit Einzelkräften belasteter Stab.

In den Fällen, bei denen die Maximalmomente beider getrennten Belastungen an eine Stelle zusammenfallen, kann man die Reactionen, die Momente und die Durchbiegung einfach durch Combination der Gleichungen für die getrennten Belastungen erhalten.

1. Der freitragende Stab ist gleichmässig mit Q und am freien Ende mit B belastet.



An einer beliebigen Stelle in der Entfernung x vom freien Ende ist das Moment

$$M = Px + Q\,\frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2}.\ *)$$

Das Maximalmoment mit $x = l$ ist

$$M_{max.} = Pl + Q\,\frac{l}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (118)$$

Die grösste Durchbiegung ist nach den Gleichungen 58 und 94

$$y_{max.} = \frac{l^3}{EJ}\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (119)$$

Die Momentenfläche erhält man durch Addition der Ordinaten von den Flächen der Einzelfälle.

2. Der an den Enden gestützte Stab ist gleichmässig mit Q und in der Mitte mit P belastet.

Nach den Gleichungen 63 und 90, oder direct gebildet mit den Reactionen $A = B = \dfrac{P + Q}{2}$ ist das Maximalmoment

---

*) Das Stück $\frac{x}{l}$ der Last kann man sich im Schwerpunkt desselben concentrirt denken; es ist dann der Hebelarm $\frac{x}{2}$ und das Moment $Q\,\frac{x}{l}\,\frac{x}{2}$.

$$M_{max.} = P\frac{l}{4} + \frac{Ql}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Die grösste Durchbiegung ist nach den Gleichungen 65 und 89

$$y_{max.} = \frac{l^3}{384\,EJ}(8\,P + 5\,Q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Beispiel. Ein 6 m langer Brückenträger von I Eisen ist mit 800 kg gleichmässig und durch eine über denselben sich bewegende Last von 2500 kg belastet. Die Querschnittsdimensionen sollen festgestellt werden.

Das Maximalmoment findet statt, wenn die sich bewegende Last in der Mitte der Trägerlänge steht. Es ist nach Gl. 120

$$M = 2500\,.\,\frac{600}{4} + 800\,.\,\frac{600}{8} = 435\,000$$

und nach der Gl. $W = \frac{M}{k}$ mit $k = 700$ kg ist das Widerstandsmoment

$$W = \frac{435\,000}{700} = 621{,}4.$$

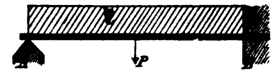
Diesem entspricht ein Profil von 300 mm Höhe, 125 mm Breite, 10,8 mm Stegdicke und 16,2 mm Rippendicke mit einem Widerstandsmoment von 650. Das Eigengewicht ist in der gleichmässigen Belastung schätzungsweise mit eingerechnet.

3. Der an einem Ende eingeklemmte, am anderen Ende gestützte Stab ist gleichmässig mit Q und in der Mitte zwischen den Stützpunkten mit P belastet.

Nach den Gleichungen 66 und 96 ist die Reaction im Stützpunkt

$$A = \frac{5}{16}P + \frac{3}{8}Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

Das Maximalmoment an der Einklemmungsstelle nach den Gleichungen 69 und 101



$$M_{max.} = \frac{3}{16}\,Pl + Q\,\frac{l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Die grösste Durchbiegung fällt nach den Gleichungen 68 und 104 für beide Sonderfälle nicht genau an die gleiche Stelle. Angenähert kann man aber auch hier die grösste Durchbiegung erhalten durch Addition der $y_{max.}$ für beide Sonderfälle.

4. Der an den Enden eingeklemmte Stab ist gleichmässig mit Q und in der Mitte mit P belastet.

Nach den Gleichungen 76a*) und 105 ist, absolut genommen

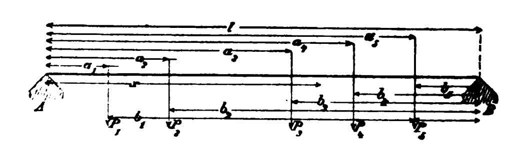
$$M_{max.} = P\frac{l}{8} + Q\frac{l}{12} \quad \text{. . . . .} \quad (124)$$

und nach den Gleichungen 75 und 107

$$y_{max.} = \frac{l^3}{384\,EJ}[2\,P + Q] \quad \text{. . . . .} \quad (125)$$

Behandlung weiterer Fälle mit zusammengesetzter Belastung.

Die Berechnung des für die Praxis wichtigen Maximalmomentes und der Entfernung des gefährlichen Querschnittes von einem der Stützpunkte, hat nach dem Vorhergehendem keine Schwierigkeiten. Auch die Berechnung der Durchbiegung ist zwar etwas mühsam, aber nicht schwierig, wenn man nach Grashof die Durchbiegung an einem bestimmten Punkt als die Summe der Antheile auffasst, die von jeder einzelnen Belastung auf den Punkt kommen. Es sei zum Beispiel angenommen: Der an den Enden gestützte Stab ist durch 5 Einzelkräfte P_1 bis P_5 in den Abständen a_1 bis a_5 von A und b_1 bis b_5 von B belastet.



Nach Gleichung 61 ist dann die Durchbiegung in der Entfernung x von A mit Ausscheidung der Constanten x und Bezeichnung der verschiedenen Abstände allgemein mit a und b, der Kräfte mit P:

$$y_1 = \frac{1}{EJ}\frac{x}{6l}\sum_4^5 [Pab\,(a + 2b)] - \frac{1}{EJ}\frac{x^3}{6l}\sum_4^5 Pb \quad . \quad (126)$$

Da die Gl. 61 voraussetzt, dass $a > b$ ist, so muss man, um die von den Kräften P_1 bis P_3 bewirkten Durchbiegungen zu berechnen, x mit $l - x$ und a mit b vertauschen. Man erhält so

$$y_2 = \frac{1}{EJ}\frac{l-x}{6l}\sum_1^3 [Pab\,(2a+b)] - \frac{1}{EJ}\frac{(l-x)^3}{6l}\sum_1^3 Pa \quad (126)$$

Die Gesammtdurchbiegung ist dann $y = y_1 + y_2$.

---

*) Die Nummer 76a bezeichnet hier das Moment $-P\frac{l}{8}$ an den Einklemmuugspunkten des Stabes.

Der geringeren Wichtigkeit der Durchbiegung wegen soll die Berechnung derselben nicht weiter ausgeführt werden.

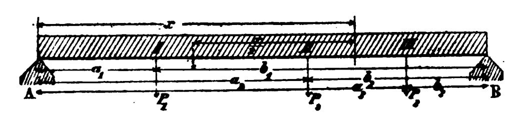
Die Entfernung des gefährlichen Querschnittes von einem der Stützpunkte und das in demselben wirkende Maximalmoment lässt sich ohne Weiteres bestimmen, mit Hülfe des Satzes: Das Maximalmoment liegt da, wo die Verticalkraft gleich Null ist. Man berechnet die Reactionen, d. h. die Verticalkräfte in den Stützpunkten und die Verticalkräfte in den Belastungspunkten sowie in den Endpunkten etwa vorhandener streckenweise gleichförmiger Belastungen. Zwei benachbarte Verticalkräfte werden entgegengesetzte Vorzeichen haben, woraus folgt, dass zwischen ihnen der Punkt liegen muss, wo die Verticalkraft gleich Null, wo also das Maximalmoment ist. Bezeichnet man die noch unbekannte Entfernung des Punktes von einem der Stützpunkte mit x und bildet den Ausdruck für die Verticalkraft in dem Punkte, so ist der Werth desselben gleich Null. Daraus kann man x berechnen und mit Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung für das Moment in dem fraglichen Punkte, erhält man letzteres als das Maximalmoment.

Die Bildung der Reactionen kann nach dem Hebelgesetz geschehen oder direct mit der daraus folgenden Regel:

Der auf einen der beiden Stützpunkte z. B. A entfallende Theil einer Kraft ist proportional dem Verhältniss von: Abstand des Angriffspunktes der Kraft vom anderen Stützpunkt, zur Länge des Stabes.

Die Verticalkraft in einem Punkte in der Entfernung x vom Stützpunkt ist gleich der algebraischen Summe aller Kräfte, deren Angriffspunkte in die Strecke x fallen nach der Gleichung $V = \int q\,dx$. Die in der Strecke $l - x$ angreifenden Kräfte sind durch die Reaction vertreten.

Für den nach nebenstehender Figur belasteten Träger ist z. B., wenn Q die gleichmässige Belastung ist:



$$\text{Die Reaction } A = \frac{Q}{2} + P_1 \frac{b_1}{l} + P_2 \frac{b_2}{l} + P_3 \frac{b_3}{l},$$

$$\text{„ \quad „ } B = \frac{Q}{2} + P_1 \frac{a_1}{l} + P_2 \frac{a_2}{l} + P_3 \frac{a_3}{l}.$$

Die Verticalkraft im Belastungspunkt I ist

$$V_I = A - P_1 - Q\frac{a_1}{l},$$

wenn man die aufwärts gerichtete Reaction mit $+$, die abwärts gerichteten Kräfte mit $-$ bezeichnet. Das Stück von Q, welches auf die Strecke a_1 kommt, ist $Q\frac{a_1}{l}$.

Im Punkte II ist die Verticalkraft

$$V_{II} = A - P_1 - P_2 - Q\frac{a_2}{l},$$

ferner ist

$$V_{III} = A - P_1 - P_2 - P_3 - Q\frac{a_3}{l}.$$

Nun sei angenommen, V_{III} ist negativ, und V_{II} noch positiv, so muss, vorbehaltlich der Ergänzung auf nächster Seite, zwischen II und III in der Entfernung x der Punkt liegen, wo $V = 0$ ist.

Aus der Gleichung

$$V_x = A - P_1 - P_2 - Q\frac{x}{l} = o$$

folgt

$$x = (A - P_1 - P_2)\frac{l}{Q}.$$

Die Gleichung für das Moment in der Entfernung x von A ist

$$M_x = Ax - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - Q\frac{x}{l}\frac{x}{2}.\text{*)}$$

Das Maximalmoment erhält man durch Einsetzen des ausgerechneten Werthes von x in die letzte Gleichung.

Die Bildung der sämmtlichen Verticalkräfte muss immer von demselben Stützpunkt A oder B aus geschehen.

Ist der Stab nur durch Einzelkräfte belastet, so liegt das Maximalmoment stets in einem der Belastungspunkte. Es lässt sich dies leicht graphisch nachweisen. Die Momentenfläche ist von geraden Linien begrenzt, die sich über den Belastungspunkten schneiden; einer der Schnittpunkte liegt am höchsten und seine Ordinate stellt das Maximalmoment dar. Man hat in diesem Fall einfach die Momente

---

*) Das Moment Ax dreht von links nach rechts, die übrigen von rechts nach links. Das Stück der Belastung $Q\frac{x}{l}$ kann man sich im Schwerpunkt concentrirt denken, so dass der Hebelarm $\frac{x}{2}$ und das Moment $Q\frac{x}{l}\frac{x}{2}$ ist.

in den Belastungspunkten zu berechnen und das grösste davon ist das Maximalmoment.

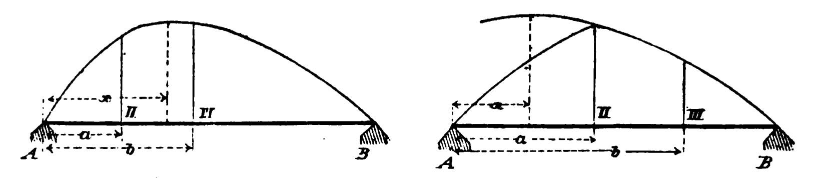
Bestehen die Belastungen aus Einzelkräften und streckenweise oder über die ganze Stablänge gleichmässig oder ungleichmässig vertheilten Lasten, so sind 3 Fälle möglich.

Sind a und b die Entfernungen der Belastungspunkte, z. B. *II* und *III* (siehe Figur weiter unten), zwischen denen die Verticalkraft $V = o$ liegen muss, so ist entweder

1. $x > a$ und $< b$. Es liegt der gefährliche Querschnitt, also der Punkt mit $V = o$, an der berechneten Stelle in der Entfernung x, oder es ist

2. $x < a$, dann liegt der gefährliche Querschnitt in *II*, oder es ist

3. $x > b$, dann liegt der gefährliche Querschnitt in *III*.

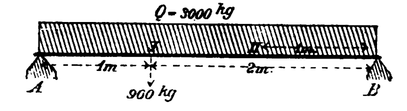


In letzteren beiden Fällen sind die Momentenflächen von Curven begrenzt, die sich im Falle 2 über Punkt *II*, im Falle 3 über Punkt *III* schneiden, deren Scheitelpunkte, für die $\frac{dM}{dx} = V = o$ ist, aber ausserhalb der Momentenfläche liegen. Obenstehende Figuren veranschaulichen die zwei ersten Fälle, der dritte ist leicht zu ergänzen.

Der aus den beiden letzten Fällen hervorgehende scheinbare Widerspruch mit dem Satze: Das Maximalmoment liegt da, wo $V = o$ ist, verschwindet, wenn man bedenkt, dass in dem Belastungspunkte, wo das Maximalmoment liegt, die Verticalkraft plötzlich entgegengesetztes Vorzeichen erhält, dass sie also doch in dem Punkte durch Null hindurch geht.

Beispiel 1.

Für den nach nebenstehender Figur belasteten Träger soll der Querschnitt berechnet werden.



Die Reactionen sind

$$A = \frac{3000}{2} + 900\,\frac{2}{3} = 2100 \text{ kg},$$

$$B = \frac{3000}{2} + 900 \frac{1}{3} = 1800 \text{ kg}$$

oder

$$B = (P + Q) - A = 3900 - 2100 = 1800 \text{ kg}.$$

Die Verticalkraft im Punkte I ist

$$V_I = 2100 - 900 - 3000 \cdot \frac{1}{3} = 200 \text{ kg}.$$

Die Verticalkraft in einem anderen Punkte II, 2 m von A entfernt, ist

$$V_{II} = 2100 - 900 - 3000 \frac{2}{3} = -800 \text{ kg}.$$

Es muss demnach der gefährliche Querschnitt zwischen I und II liegen. Die Entfernung desselben von A sei x, dann ist nach der Bedingung $V = o$

$$2100 - 900 - 3000 \frac{x}{3} = o, \text{ woraus } x = 1{,}2 \text{ m}.$$

Das Maximalmoment in dem Querschnitte ist nun

$$M = 2100 \cdot x - 900 (x - 1) - 3000 \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{2}$$

$$= 2100 \cdot 1{,}2 - 900 \cdot 0{,}2 - 3000 \frac{1{,}2^2}{6}$$

$$= 1620 \text{ mkg}.$$

Von B aus gerechnet, muss man denselben Werth

$$M = 1800 \cdot 1{,}8 - 3000 \frac{1{,}8}{3} \cdot \frac{1{,}8}{2} = 1620$$

erhalten.

Die nöthige Grösse des Widerstandsmomentes ist nun nach der Gleichung $M = Wk$

$$W = \frac{M}{k}$$

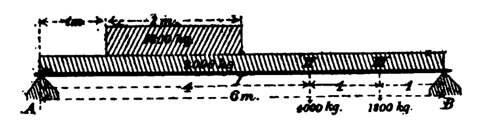
und, wenn der Träger von Schmiedeeisen ist, mit I förmigem Querschnitt, so ist für Millimetermaass und $k = 9$ kg

$$W = \frac{1\,620\,000}{9} = 180\,000.$$

Dem entspricht nach einer vorliegenden Profiltabelle der Querschnitt mit 180 mm Höhe, 90 mm Breite, 7 mm Stegdicke und 11 mm Rippendicke, dessen Widerstandsmoment 182 900 ist.

Beispiel 2.

Für den nach nebenstehender Figur belasteten Träger soll das Maximalmoment berechnet werden.



$$\text{Reaction } A = 2000 \frac{1}{2} + 1800 \frac{4}{6} + 4000 \frac{2}{6} + 1800 \frac{1}{6}$$
$$= 3833{,}3 \text{ kg.}$$

$$\text{Reaction } B = 2000 \frac{1}{2} + 1800 \frac{2}{6} + 4000 \frac{4}{6} + 1800 \frac{5}{6}$$
$$= 5766{,}6 \text{ kg.}$$

Die Verticalkraft im Punkte I ist

$$V_I = 3833{,}3 - 1800 - 2000 \cdot \frac{1}{2} = 1033{,}3 \text{ kg,}$$

im Punkte II

$$V_{II} = 3833{,}3 - 1800 - 2000 \frac{4}{6} - 4000 = - 3299{,}9 \text{ kg.}$$

Der gefährliche Querschnitt muss also zwischen den Punkten I und II, oder in einem derselben liegen. Ist x die Entfernung desselben von A, so ist

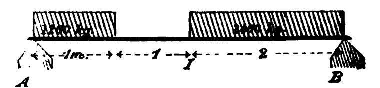
$$V_x = 3833{,}3 - 1800 - 2000 \frac{x}{6} = o, \text{ woraus } x = 6{,}06 \text{ m.}$$

Da x grösser ist als die Entfernung des Punktes II von A, so liegt der gefährliche Querschnitt im Belastungspunkt II und das Moment in demselben ist

$$M = 3833{,}3 \cdot 4 - 1800 \cdot 2 = 2000 \frac{4}{6} \cdot 2 = 9066{,}6 \text{ mkg.}$$

Beispiel 3.

Für nebenstehenden Träger sind die Reactionen



$$A = 1200 \frac{3{,}5}{4} + 2400 \frac{1}{4} = 1650 \text{ kg, } B = 3600 - 1650 = 1950 \text{ kg.}$$

Für den Punkt I ist

$$V_I = 1950 - 2400 = - 450.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also zwischen I und B in der Entfernung x von B und es ist

$$V_x = 1950 - 2400 \frac{x}{2} = o, \text{ woraus } x = 1{,}625 \text{ m.}$$

Das Maximalmoment ist

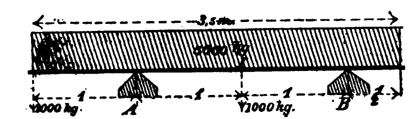
$$M = 1950 \,.\, 1{,}625 - 2400 \,.\, \frac{1{,}625}{2} \,.\, \frac{1{,}625}{2} = 1584{,}3 \text{ mkg.}$$

Von A ausgehend, erhält man denselben Werth.

Die Bestimmung etwa vorhandener Wendepunkte findet in ähnlicher Weise statt mit Hülfe des Satzes: Ein Wendepunkt liegt da, wo das Moment gleich Null ist.

Man berechnet die Momente in den Stützpunkten und in den Belastungspunkten. Haben die Momente in zwei benachbarten Punkten entgegengesetzte Vorzeichen, so muss zwischen beiden ein Punkt mit $M = o$, also ein Wendepunkt liegen. Bezeichnet man die Entfernung dieses Punktes von einem Stabende mit x und setzt den Ausdruck für das Moment in dem Punkte gleich Null, so erhält man hieraus den Werth von x.

Beispiel.



Mit B als Drehpunkt ist zur Bestimmung der Reaction A (s. Gl. 82, S. 53) $A \,.\, 2 = 1000 \,.\, 3 + 1000 \,.\, 1 + 5000 \,\frac{3}{3{,}5} \,.\, 1{,}5 - 5000 \,\frac{0{,}5}{3{,}5} \,.\, 0{,}25$,

$$A = 2000 + 2500 \,.\, 1{,}25 = 5125 \text{ kg.}$$

Mit A als Drehpunkt ist für die Reaction B

$$B \,.\, 2 = 1000 \,.\, 1 + 5000 \,\frac{2{,}5}{3{,}5} \,.\, \frac{2{,}5}{2} - 1000 \,.\, 1 - 5000 \,\frac{1}{3{,}5} \,.\, \frac{1}{2},$$

daraus

$$B = 1875 \text{ kg.}$$

Im Punkte I ist die Verticalkraft

$$V_I = 5125 - 1000 - 1000 - 5000 \,\frac{2}{3{,}5} = 267{,}9 \text{ kg.}$$

Unmittelbar vor dem Punkt B ist die Verticalkraft

$$5125 - 1000 - 1000 - 5000 \,\frac{3}{3{,}5} = -1160,$$

also negativ, im Stützpunkt B wird sie positiv, denn es kommt das Glied 1875 mit + Vorzeichen hinzu. Daraus folgt, dass zwischen I und B und in B Maximalmomente liegen. Vom linken Stabende bis A ist die Verticalkraft ebenfalls negativ, während sie in A plötzlich positiv wird, demnach liegt auch in A ein Maximalmoment. Das grösste von den drei Momenten ist das absolute Maximalmoment, die übrigen sind nur relative Maxima.

Für das Maximalmoment zwischen I und B ist

$$V = 5125 - 1000 - 1000 - 5000 \frac{x}{3,5} = o, \text{ woraus } x = 2,187 \text{ m}$$

und das Moment selbst von der linken Seite aus gebildet

$$M = 5125 \,.\, 1,187 - 1000 \,.\, 2,187 - 1000 \,.\, 0,187 - 5000 \,.\, 0,683$$
$$= 6083,4 - 5789 = 294,4 \text{ mkg.}$$

Das Moment in A ist

$$M_A = -1000 \,.\, 1 - 5000 \frac{1}{3,5} \,.\, \frac{1}{2} = -1714,3 \text{ mkg.}$$

Das Moment in B von der linken Seite aus gebildet

$$M_B = 5125 \,.\, 2 - 1000 \,.\, 3 - 1000 \,.\, 1 - 5000 \frac{3}{3,5} \,.\, 1,5$$
$$= -178,5 \text{ mkg.}$$

Der gefährliche Querschnitt oder Bruchquerschnitt liegt also im Stützpunkt A mit dem Maximalmoment 1714,3 und zur Berechnung des Querschnittes ist $1714,3 = Wk$.

Wegen der verschiedenen Vorzeichen der Momente muss zwischen A und I und zwischen I und B ein Punkt mit $M = o$, also ein Wendepunkt liegen.

Für den Wendepunkt zwischen A und I ist

$$M = 5125 \,.\, (x - 1) - 1000\, x - 5000 \frac{x}{3,5} \,.\, \frac{x}{2} = o$$

woraus

$$714,3\, x^2 - 4125\, x + 5125 = o$$
$$x^2 - 5,775\, x + 7,175 = o$$
$$x = \frac{5,775}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,775}{2}\right)^2 - 7,175} = 2,8875 \pm 1,078.$$

Das negative Vorzeichen gilt, denn das positive ergiebt einen unmöglichen Werth; es ist also die Entfernung des Wendepunktes vom linken Ende $x = 1,809$ m.

Für den Wendepunkt zwischen I und B ist, wenn man vom anderen Ende ausgeht

$$M = -1875 \,.\, (x_1 - 0,5) + 5000 \frac{x_1}{3,5} \,.\, \frac{x_1}{2} = o$$
$$x_1^2 - 2,625\, x_1 + 1,312 = o$$
$$x_1 = 1,312 \pm \sqrt{0,411} = 1,312 \pm 0,541$$
$$x_1 = 0,6715 \text{ m.}$$

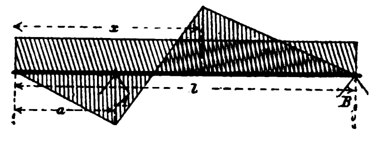
Die Bestimmung der Wendepunkte kann sehr leicht graphisch geschehen durch Aufzeichnung der Momentenfläche.

Ein Träger hat dann die grösste Tragfähigkeit, gleiche Widerstandsfähigkeit des Materials gegen Zug und Druck vorausgesetzt, wenn die relativen Maximalmomente alle gleich gross sind, denn dann kommt die Festigkeit des Materials in mehreren Querschnitten zugleich voll zur Geltung.

Träger von solchem Material, das verschiedene Zug- und Druckfestigkeit besitzt, haben dann grössere Tragfähigkeit, wenn kein Wendepunkt vorhanden ist. (Siehe Seite 78.) Bedingung dafür ist, dass die Stützen soweit einander genähert werden, dass das Maximalmoment zwischen denselben gleich Null ist, dann sind nur Momente von demselben Vorzeichen möglich.

Beispiel 1.

Der nach umstehender Figur belastete Träger liegt mit dem einen Ende auf der festen Stütze B auf. Die Stütze A soll eine solche Entfernung a vom anderen Ende erhalten, dass die Tragfähigkeit ein Maximum wird.



Für Gleichgewicht muss sein

$$A\,(l - a) = Q\,\frac{l}{2},$$

woraus Reaction

$$A = Q\,\frac{l}{2\,(l - a)}.$$

Für das Maximalmoment ist

$$V = A - Q\,\frac{x}{l} = o,$$

woraus

$$x = \frac{A\,l}{Q} = \frac{l^2}{2\,(l - a)}.$$

Das Maximalmoment ist also

$$M = A\,(x - a) - Q\,\frac{x^2}{2\,l} = A\,(x - a) - A\,\frac{x}{2},$$

denn nach der Gleichung $x = \frac{A\,l}{Q}$ ist

$$A = Q\,\frac{x}{l},$$

Nach Einsetzung der Werthe für A und x folgt

$$M = \frac{Q\,l}{2\,(l - a)}\left(\frac{l^2}{4\,(l - a)} - a\right) = \frac{Q\,l}{8\,(l - a)^2}\cdot(l - 2\,a)^2.$$

Das Moment in A ist $Q\,\frac{a^2}{2l}$, also ist die Bedingung für maximale Tragfähigkeit

$$Q\,\frac{a^2}{2l} = Q\,\frac{l}{8}\left(\frac{l-2a}{l-a}\right)^2 \text{ woraus } \frac{2a}{l} = \frac{l-2a}{l-a},$$

oder

$$2al - 2a^2 = l^2 - 2al \text{ und } a^2 - 2al + \frac{l^2}{2} = o,$$

woraus

$$a = l \pm \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{2}} = l \pm l\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}293\ l.$$

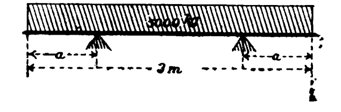
Soll der Träger keinen Wendepunkt haben, so muss das Maximalmoment zwischen den Stützen gleich Null sein, d. h. die Momentenfläche darf nur auf einer Seite der Trägeraxe liegen.

Die Bedingung $M = \frac{Ql}{8\,(l-a)^2}\,(l - 2a)^2 = o$ wird erfüllt mit $l = 2a$ und $a = \frac{l}{2}$.

Das Maximalmoment ist dann in A

$$M = Q\,\frac{a^2}{2l} = \frac{Ql^2}{8l} = Q\,\frac{l}{8}\ .$$

Beispiel 2.



Die Stützen sollen einen solchen Abstand a von den Enden des Trägers erhalten, dass ein Wendepunkt nicht vorhanden ist.

Die Reactionen sind $A = B = 2500$ kg.

Das Maximalmoment zwischen den Stützen ist

$$M = 2500\ .\ (1{,}5 - a) - 2500\ .\ \frac{1{,}5}{2}.$$

Dasselbe wird Null, wenn der Abstand $a = 0{,}75$ m ist.

Träger von Schmiedeeisen.

Die Tragfähigkeit eines Trägers ist, nach der Gleichung $M = W\,.\,k$, abhängig von der Grösse des Widerstandsmomentes und von der Grösse der zulässigen Beanspruchung k. Ersterer Umstand ist, wie schon erwähnt, die Veranlassung zur Wahl der bekannten Trägerprofile. Bei Schmiedeeisen hat k für Zug und Druck den gleichen Werth; es werden also für auf Biegung beanspruchte schmiedeeiserne Träger

diejenigen Profile die vortheilhaftesten sein, bei denen zu beiden Seiten der neutralen Axe die maximalen Spannungen den vollen Werth für k gleichzeitig erreichen können, die also nur ein Widerstandsmoment haben, oder deren neutrale Axe den Querschnitt symmetrisch theilt.

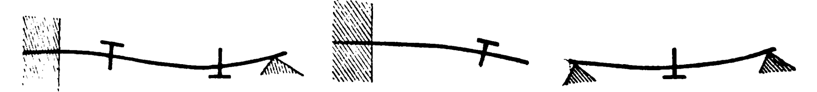
Ist der Querschnitt nicht symmetrisch, wie z. B. L und T Form, so hat man zur Berechnung der Tragfähigkeit das kleinere Widerstandsmoment $W_1 = \frac{J}{a_1}$ oder $W_2 = \frac{J}{a_2}$ (siehe Seite 25) zu wählen.

Träger von Gusseisen.

Die Festigkeit des Gusseisens ist nach der Tabelle Seite 5 dreimal so gross gegen Druck als gegen Zug; es werden demnach symmetrische Profile mit gleich grossen Widerstandsmomenten unvortheilhaft und mit Materialverschwendung an der auf Druck beanspruchten Seite verbunden sein. Für volle zulässige Beanspruchung auf jeder Seite der neutralen Axe müssen sich die Abstände der äussersten Schichten von der neutralen Axe $a_1 : a_2$ verhalten wie $1 : 3 = k_1 : k_2$. Man nennt solche Profile: **Querschnitte gleicher Festigkeit,** die meist I und T Form haben.

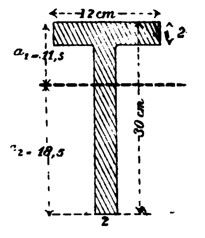
Gleicher Festigkeit auf beiden Seiten der neutralen Axe entsprechend, muss $W_1 k_1 = W_2 k_2$ oder $\frac{J}{a_1} k_1 = \frac{J}{a_2} k_2$ u. folglich $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_1}{k_2}$ sein. Ist a_2 der grössere Abstand, so ist k_2 die grössere zulässige Beanspruchung. Aus obigen Gleichungen und mit Rücksicht auf die Bedeutung des Trägheitsmomentes geht dann ohne Weiteres hervor, dass der kleinere Abstand a_1 und der Flansch, resp. der grössere Flansch auf der gezogenen Seite liegen müssen.

Für Träger mit Wendepunkten ist, wie leicht erklärlich, ein Querschnitt gleicher Festigkeit nicht gut ausführbar, da im Wendepunkt Zug- und Druckspannungen ihre Lage vertauschen. Für solche Träger ist also — abgesehen von anderen Materialien — nur Schmiedeeisen vortheilhaft.



Bei der Berechnung der Tragfähigkeit eines gegebenen Profiles ist das kleinere der beiden Produkte $W_1 k_1$ oder $W_2 k_2$ in Rechnung zu ziehen.

Beispiel 1.



Ein gusseiserner Freiträger (an einem Ende eingeklemmt, am andern frei) ist gleichmässig belastet und hat nebenstehend skizzirten Querschnitt. Die Länge ist 1 m = 100 cm. Wie gross darf die Belastung Q sein?

Zur Berechnung der Widerstandsmomente ist der Abstand der neutralen Axe von der oberen Kante nach Gleichung 23

$$a_1 = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 + 28 \cdot 2 \cdot 16}{12 \cdot 2 + 28 \cdot 2} \sim 11{,}5 \text{ cm.}$$

Das Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{3}(12 \cdot 11{,}5^3 - 10 \cdot 9{,}5^3 + 2 \cdot 18{,}5^3) = 7447.$$

Es ist $a_1 = 11{,}5$ cm und $a_2 = 18{,}5$ cm und wenn der Flansch auf der gezogenen Seite liegt, so ist

$$W_1 k_1 \gtrless W_2 k_2 \text{ oder } \frac{J}{a_1} k_1 \gtrless \frac{J}{a_2} k_2,$$

wenn

$$\frac{a_2}{a_1} \gtrless \frac{k_2}{k_1} \text{ ist.}$$

k_2 für Druck ist 900 kg und k_1 für Zug ist 300 kg, es ist also hier $\frac{a_2}{a_1}$ oder $\frac{18{,}5}{11{,}5}$ kleiner als $\frac{900}{300}$ und demnach $W_1 k_1$ kleiner als $W_2 k_2$. Die Tragfähigkeit ist also nach Gl. 95

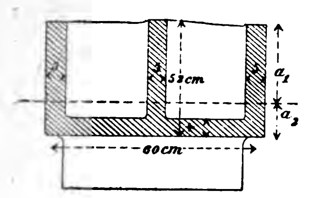
$$Q \frac{l}{2} = W_1 k_1, \text{ mit } W_1 k_1 = \frac{7447}{11{,}5} \cdot 300,$$

folgt

$$Q = W_1 k_1 \frac{2}{l} = \frac{7447}{11{,}5} \cdot 300 \frac{2}{100} = 3885 \text{ kg.}$$

Beispiel 2.

Auf die gusseiserne Kopfplatte einer hydraulischen Presse wirkt der Druck von 180000 kg. Die Kopfplatte ist auf den 4 Säulen durch Muttern befestigt. Die Entfernungen der Säulenmittelebenen sind 50 cm und 60 cm. Fasst man die Kopfplatte als gleichmässig belasteten Träger auf, so ist die Trägerlänge 50 cm, da die Platte in der andern Richtung durch die unten angegossenen Wände des obersten Presskastens besonders versteift ist.



Nebenstehender Querschnitt ist mit den eingeschriebenen Dimensionen schätzungsweise angenommen und es ist zu untersuchen, ob die Spannungen in den zulässigen Grenzen bleiben.

Der Abstand der neutralen Axe von der unteren auf Druck beanspruchten Kante ist

$$a_1 = \frac{60 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 28 \cdot 18}{60 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 28} \backsim 12{,}2 \text{ cm.}$$

Das Trägheitsmoment

$$J = \left(60 \cdot 12{,}2^3 - 45 \cdot 8{,}2^3 + 3 \cdot 5 \cdot 19{,}8^3\right) = 66861.$$

Die Widerstandsmomente sind

$$W_1 = \frac{J}{a_1} = \frac{66861}{19{,}8} \backsim 3380,$$

$$W_2 = \frac{J}{a_2} = \frac{66861}{12{,}2} \backsim 5480.$$

Das Maximalmoment ist

$$M = Q \frac{l}{8} = 180000 \cdot \frac{50}{8} = 1125000.$$

Nun ist die grösste Zugspannung

$$k_1 = \frac{M}{W_1} = \frac{1125000}{3380} \backsim 330 \text{ kg,}$$

die grösste Druckspannung

$$k_2 = \frac{M}{W_2} = \frac{1125000}{5480} \backsim 206 \text{ kg.}$$

Wenn man bei geringerer Zugspannung das Material besser ausnützen will, so muss man mit Verzichtleistung auf leichtere Herstellung der Gussform, denn es werden dann Kerne nöthig, die Rippen oben mit Flanschen versehen, oder Hohlguss mit geschlossenem Querschnitt anwenden.*)

---

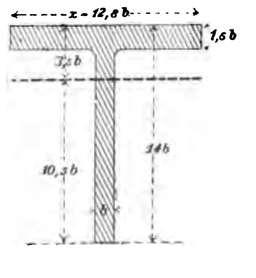
*) Ein Querschnitt gleicher Festigkeit ist, wenigstens in der üblichen oben skizzirten Form nicht möglich, weil der Flansch an der durch die Biegung gedrückten Seite liegt. In einem neueren Werke ist mit Nichtbeachtung dieses Umstandes die Berechnung durchgeführt und man erkennt leicht die Unrichtigkeit derselben.

Die Berechnung der Querschnitte gleicher Festigkeit

hat nach der Bedingung zu geschehen, dass die neutrale Axe die Höhe des Querschnittes im Verhältniss der zulässigen Beanspruchungen theilt. Nimmt man dieses Verhältniss nach der Tabelle Seite 5 gleich 1 : 3 an, so ist nach den Folgerungen auf Seite 78 der Abstand der neutralen Axe von der Kante des Flansches, resp. des grösseren Flansches gleich $\frac{h}{4}$, wenn h die Höhe des Querschnittes ist. Man hat also in der Gl. 23, $x = \frac{f_1 c_1 + f_2 c_2 + \dots}{f_1 + f_2 + \dots}$, für x den Werth $\frac{h}{4}$ zu setzen.

Für die Höhe h und die Flanschendicke nimmt man passende Dimensionen an und drückt diese durch die Rippenstärke b aus. Als die Unbekannte, welche die erwähnte Bedingung zu erfüllen hat, ist die Flanschenbreite anzunehmen.

Nebenstehender Querschnitt soll ein solcher von gleicher Festigkeit werden.



Die unbekannte Flanschenbreite sei x, dann ist nach der Bedingung

$$\frac{h}{4}(f_1 + f_2 + \dots) = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \dots :$$

$$3{,}5\, b\, (x \,.\, 1{,}5\, b + 12{,}5\, b^2)$$
$$= x \,.\, 1{,}5\, b \,.\, 0{,}75\, b + 12{,}5\, b^2 \,.\, 7{,}75\, b$$

oder

$$x b^2 (5{,}25 - 1{,}125) = b^3 (96{,}87 - 43{,}75)$$

und

$$x = \frac{53{,}12}{4{,}125} b = 12{,}8\, b.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes ist

$$J = \frac{1}{3}\left(12{,}8\, b \,.\, (3{,}5\, b)^3 - 11{,}8\, b \,.\, (2\, b)^3 + b \,.\, (10{,}5\, b)^3\right) = 537{,}3\, b^4.$$

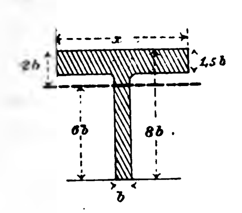
Die Widerstandsmomente sind

$$W_1 = \frac{J}{3{,}5\, b} = \frac{537{,}3\, b^3}{3{,}5} = 153{,}5\, b^3$$

$$W_2 = \frac{J}{10{,}5\, b} = \frac{537{,}3\, b^3}{10{,}5} = 51{,}2\, b^3.$$

Für einen bestimmten Fall berechnet man aus der Gleichung $M = W k$ den Werth von W und je nachdem man k für Zug oder für Druck eingesetzt hat, setzt man den erhaltenen Werth dem obigen

Ausdruck für W_1 oder W_2 gleich, woraus dann b, die Höhe des Querschnittes und die Flanschenbreite desselben folgt.



Für diesen Querschnitt ist

$$2\,b\,(x\,.\,1{,}5\,b + 6{,}5\,b^2)$$
$$= x\,.\,1{,}5\,b\,.\,0{,}75\,b + 6{,}5\,b^2\,.\,4{,}75\,b,$$
$$x\,b^2\,(3 - 1{,}125) = b^3\,(30{,}8 - 13),$$

woraus

$$x = \frac{17{,}8}{1{,}875}\,b = 9{,}43\,b.$$

$$J = \frac{1}{3}\left(9{,}43\,b\,.\,(2\,b)^3 - 8{,}43\,b\,.\,(0{,}5\,b)^3 + b\,.\,(6b)^3\right) = 96{,}66\,b^4.$$

$$W_1 = \frac{96{,}66\,b^4}{2\,b} = 48{,}33\,b^3.\quad W_2 = \frac{96{,}66\,b^4}{6\,b} = 16{,}11\,b^3.$$

Ist z. B. der Träger als Freiträger 1 m lang und mit 2000 kg gleichmässig belastet, so ist $Q\,\frac{l}{2} = W\,k$ und mit $k = 600$ kg für Druck — weniger zuverlässiges Material vorausgesetzt —

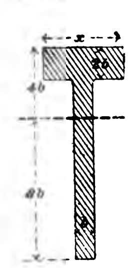
$$W = \frac{2000\,.\,100}{2\,.\,600} = 166{,}6.$$

Mit Annahme obigen Profiles ist nun $16{,}11\,b^3 = 166{,}6$,

$$b = \sqrt[3]{\frac{166{,}6}{16{,}11}} \sim 2{,}1\text{ cm} = 21\text{ mm}.$$

Die Höhe des Profiles ist $h = 8\,.\,21 = 168$ mm und die Flanschbreite $x = 9{,}43\,.\,21 = 198$ mm. Es musste hier der Werth von W_2 eingesetzt werden, da k für Druck angenommen war.

Das Verhältniss 3 : 1 der zulässigeu Beanspruchungen ergiebt grosse Flanschenbreite und kleine Rippenstärke. Für die Anwendung günstigere Querschnitte erhält man bei der meist üblichen Annahme der zulässigen Beanspruchung 500 kg pro qcm für Druck und 250 kg für Zug, also für das Verhältniss $\frac{k_2}{k_1} = 2$.



Für nebenstehenden Querschnitt ist

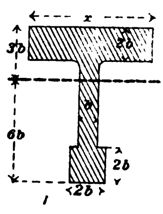
$$4\,b\,(x\,.\,2\,b + 10\,b\,) = x\,.\,2b\,.\,b + 8b^2.\,7\,b,$$

woraus $x = 5\,b$.

$$J = \frac{1}{3}\left(5\,b\,.\,(4\,b)^3 - 4\,b\,(2\,b)^3 + b\,(8\,b)^3\right)$$
$$= 266{,}67\,b^4.$$

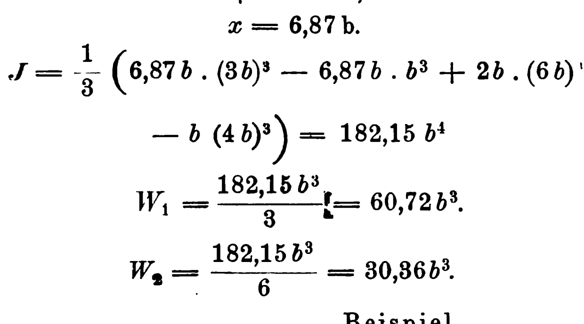
$$W_1 = \frac{266{,}67\,b^3}{4} = 66{,}62\,b^3.$$

$$W_2 = \frac{266{,}67 \,.\, b^3}{8} = 33{,}33\, b^3.$$



Für die nebenstehenden Querschnitte ist

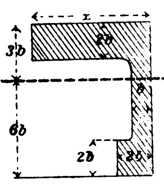
$$3\,b\,(x \,.\, 2\,b + 5\,b^2 + 4\,b^2) = x\,2b \,.\, b + 5\,b^2 \,.\, 4{,}5\,b$$
$$+ 4\,b^2 \,.\, 8\,b,$$
$$x = 6{,}87\,\text{b}.$$



$$J = \frac{1}{3}\left(6{,}87\,b \,.\, (3\,b)^3 - 6{,}87\,b \,.\, b^3 + 2\,b \,.\, (6\,b)^3\right.$$
$$\left. - \,b\,(4\,b)^3\right) = 182{,}15\,b^4$$

$$W_1 = \frac{182{,}15\,b^3}{3} = 60{,}72\,b^3.$$

$$W_2 = \frac{182{,}15\,b^3}{6} = 30{,}36\,b^3.$$

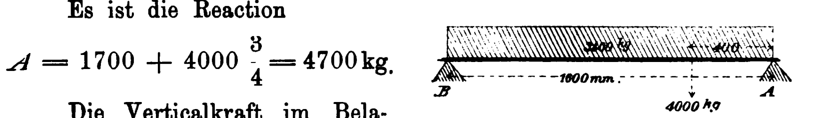


Beispiel.

Die gusseiserne Wange vom Wagen einer Laufkrahnwinde, nach nebenstehender Skizze belastet, soll berechnet werden.

Es ist die Reaction

$$A = 1700 + 4000\,\frac{3}{4} = 4700\,\text{kg}.$$



Die Verticalkraft im Belastungspunkt

$$V_I = 4700 - 4000 - 3400\,\frac{1}{4} = -\,150\ \text{kg}.$$

Für den Punkt mit $V = o$ ist demnach:

$$o = 4700 - 3400\,\frac{x}{1600},$$

woraus

$$x = 2211{,}7\ \text{mm}.$$

Da x für den gefährlichen Querschnitt grösser als 400 mm ist, so liegt der gefährliche Querschnitt im Belastungspunkt und es ist das Maximalmoment

$$M = 4700 \,.\, 400 - 3400 \,.\, \frac{1}{4} \,.\, 200 = 1\,710\,000.$$

Mit Berücksichtigung der auftretenden Stösse und der Belastungsweise unter b, siehe Seite 5, kann $k = 4$ kg pro qmm für Druck angenommen werden. Nach der Gleichung $M = Wk$ folgt

$$W = \frac{1\,710\,000}{4} = 427\,500.$$

Legt man das letzte der Profile gleicher Festigkeit zu Grunde, so ist

$$30{,}36\,b^3 = 427\,500,\; b = \sqrt[3]{\frac{427\,500}{30{,}36}} \sim 24 \text{ mm.}$$

Die Höhe des Profils ist

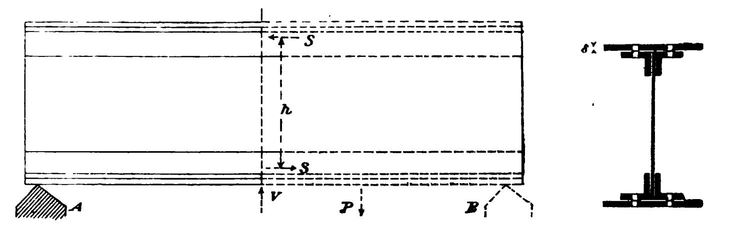
$$9\,b = 9 \,.\, 24 = 216 \text{ mm,}$$

die Breite

$$x = 6{,}87\,b = 6{,}87 \,.\, 24 \sim 165 \text{ mm.}$$

Berechnung der Blechträger.

Diese Träger bestehen aus dem verticalen Blech und den Gurtungen, die, aus Winkeleisen und den Gurtungsplatten bestehend, mit dem Blech durch Niete verbunden sind.



Die Berechnung der Träger mit beliebigem Profil geschieht im Allgemeinen nach der Bedingung, dass das Widerstandsmoment des Querschnittes gleich dem Werth $\frac{M}{k}$ sein muss. Um die Annahme und Bestimmung der Querschnittsdimensionen zu erleichtern, nimmt man bei den genieteten Trägern an, dass das Verticalblech nur zur Verbindung der Gurtungen und zur Aufnahme der Verticalkraft V dient, so dass die Gurtungen auf Zug oder Druck, je nach der Lage ober- oder unterhalb der neutralen Axe beansprucht sind. Ist S die Zug- oder Druckkraft in dem Gurtungsquerschnitt an einer beliebigen Schnittstelle in der Entfernung x von A, so entspricht das Kräftepaar Sh dem Moment der inneren Spannungen, welches gleich dem Moment der äusseren Kräfte sein muss. h ist der Abstand der Gurtungsschwerpunkte.

Es ist also $Sh = M$ und die Zug- oder Druckkraft in den Gurtungen

$$S = \frac{M}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 127.$$

Das Moment wird an der Stelle Maximum, wo $V = o$ ist, während die Verticalkraft an den Stützpunkten Maximum und zw gleich den Reactionen wird. Um nun bei der Berechnung der Gurtungen nach dem Maximalmoment auch das Verticalblech zu berücksichtigen, dessen Dicke man je nach der Grösse des Trägers 6 bis 10 mm annimmt, da dieselbe bei der Berechnung auf Abscheerung für die Anwendung zu klein ausfällt, rechnet man zum Gurtungsquerschnitt $^1/_6$ des Blechquerschnittes hinzu, welcher Theil ohngefähr dem auf den Gurtungsschwerpunkt reducirten Blechquerschnitt von der Höhe $\frac{h}{2}$ entspricht.

Ist F der ganze Gurtungsquerschnitt, einschliesslich $^1/_6$ Blechquerschnitt, so ist nach Gl. 7

$$F = \frac{S}{k} = \frac{M}{h\,k}.$$

Der auf die Winkeleisen und die Gurtungsplatten kommende Querschnitt ist

$$f = F - {}^1/_6\, q,$$

wenn q der Querschnitt des Verticalbleches ist.

Zu f ist, wie leicht erklärlich, der Querschnitt der Nietlöcher noch hinzuzuaddiren. Dieser beträgt ohngefähr 25 % von f.

Dann nimmt man die Winkeleisendimensionen an und berechnet deren Querschnittsfläche f_1.

Die Differenz $f - f_1$ ist der Querschnitt der Gurtungsplatten. Ist δ deren Dicke, so ist die Breite $b = \frac{f - f_1}{\delta}$.

Wenn diese zu gross resultirt, legt man zwei oder mehrere Platten übereinander, wofür man im Nenner $2\,\delta$ oder $n\,\delta$ zu setzen hat.

Die Breite B macht man nicht kleiner als $0{,}5\,l + 15$ in cm, wenn l die Trägerlänge in Meter ist.

Nach dieser vorläufigen Berechnung zeichnet man den Querschnitt auf, bestimmt das genaue Trägheits- und Widerstandsmoment und überzeugt sich mittelst der Gleichung $k = \frac{M}{W}$ davon, dass k nicht zu gross ausfällt. Ist $k >$ als 700 bis 800 kg pro qcm, so muss man den Querschnitt vergrössern.

Als die Höhe h kann man die Höhe des Querschnittes ohne die Gurtungsplatten annehmen.

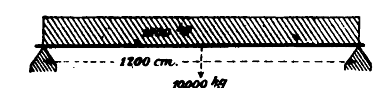
Die Niettheilung in den Gurtungen macht man ohngefähr $6\,d$ und den Durchmesser der Niete $d = 2\,\delta$.*)

Beispiel.

Die beiden Träger einer Laufkrahnbrücke sollen Blechträger von I Querschnitt sein. Die Trägerlänge ist 12 m. Die Belastung jedes Trägers durch die belastete Winde beträgt 10000 kg.

Das Eigengewicht eines solchen Trägers kann man ohngefähr 12 bis $15\,l^2$ kg annehmen, worin l die Länge in Meter ist.

Es ist also die gleichmässige Belastung durch das Eigengewicht ohngefähr $14 \,.\, 144 \sim 1800$ kg.



Bei der Stellung der Winde in der Mitte ist nun Reaction $A = 5000 + 900 = 5900$.

$$M_{max.} = 5900 \,.\, 600 - 900 \,.\, 300 = 3\,540\,000 - 270\,000 = 3\,270\,000.$$

Die Höhe des Querschnittes**) ohne die Gurtungsplatten sei 90 cm angenommen, dann ist die Spannung in den Gurtungen

$$S = \frac{M}{h} = \frac{3\,270\,000}{90} = 36\,333 \text{ kg.}$$

Die Dicke des Verticalbleches sei $\delta = 10$ mm angenommen.

Die Fläche F einer Gurtung ist

$$\frac{S}{k} = \frac{36\,333}{600} = 60{,}5 \text{ qcm.}$$

Für k empfiehlt sich die Annahme des kleinen Werthes 600, der auftretenden Stösse und grösserer Sicherheit wegen.

Die auf die Winkeleisen und Gurtungsplatten kommende Fläche ist

$$F - \frac{1}{6}\,q = 60{,}5 - \frac{1}{6} \,.\, 90 \,.\, 1 = 45{,}5 \text{ qcm.}$$

Der Nietlöcher wegen ist diese Fläche um 25 % zu vergrössern. Es ist also

$$f = 45{,}5 + 11{,}4 = 56{,}9 \text{ qcm.}$$

Nimmt man nun Winkeleisen von 80 mm Schenkellänge, 12 mm Schenkeldicke an, so ist dessen Querschnittsfläche

$$2 \,.\, 17{,}87 = 35{,}74 \text{ qcm.}$$

Es bleibt also für die Gurtungsplatte der Querschnitt

$$56{,}9 - 35{,}74 = 21{,}16 \text{ qcm.}$$

Die Breite der Gurtungsplatte ist

---

*) Weiteres über Berechnung und Ausführung der Blechträger siehe „Müller, Festigkeitslehre“.

**) Ohngefähr $^1/_{10}$ bis $^1/_{15}$ der Spannweite.

$$b = 15 + 0{,}5\,l = 15 + 6 = 21 \text{ cm},$$

demnach ist deren Dicke

$$\frac{21{,}16}{21} \backsim 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}.$$

Das Trägheitsmoment ist

$$J = \frac{1}{12}\left\{21 \,.\, 92^3 - 4 \,.\, 90^3 - 13{,}6 \,.\, 87{,}6^3 - 2{,}4 \,.\, 74^3 - 4\,(92^3 - 87{,}6^3)\right\}$$

$$J = \frac{1}{12}\,.\left(16352448 - 13456610\right) = 241320.$$

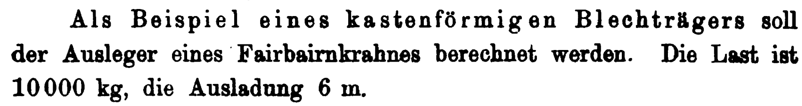
Das Widerstandsmoment ist

$$W = \frac{241320}{46} = 5246{,}1.$$

Nun ist die Beanspruchung k pro qcm

$$k = \frac{M}{W} = \frac{3270000}{5246{,}1} \backsim 623 \text{ kg}.$$

Die Niettheilung $e = 6d = 6 \,.\, 20 = 120$ mm.

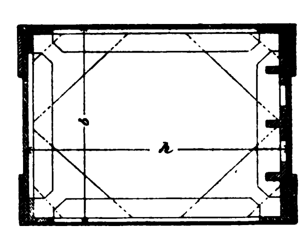


Als Beispiel eines kastenförmigen Blechträgers soll der Ausleger eines Fairbairnkrahnes berechnet werden. Die Last ist 10000 kg, die Ausladung 6 m.

Das Eigengewicht des Auslegers kann schätzungsweise gleich 5000 kg und der Angriffspunkt desselben im Schwerpunkt, 120 cm von der Krahnaxe entfernt, angenommen werden. Es ist also das maximale Biegungsmoment

$$M = 10000 \,.\, 600 + 5000 \,.\, 125 = 6625000.$$

Ohne Rücksicht auf die Seitenbleche, die man nur als Verbindung der Gurtungen und nicht kraftaufnehmend anzunehmen pflegt, ist die in der einen Gurtung erzeugte Zugspannung $S = \frac{M}{h}$.



Die Höhe des Querschnittes h werde 120 cm angenommen, entsprechend der Regel: h gleich $^1/_5$ bis $^1/_6$ der Ausladung. Es ist also

$$S = \frac{6625000}{120} \backsim 55209 \text{ kg}.$$

Ebenso gross ist die in der anderen Gurtung entstehende Druckspannung.

Die Fläche einer Gurtung, bestehend aus Gurtungsblech, Gurtungsstreifen und Winkeleisen, ist mit der Annahme von $k = 550$ kg,

$$F_1 = \frac{S}{k} = \frac{55\,209}{550} \sim 100{,}4 \text{ qcm.}$$

Für die Verschwächung oder Verminderung der Querschnittsfläche durch die Nietlöcher kann man circa 20 % annehmen, so dass also mit Hinzurechnung dieser Verschwächung

$$F = 100{,}4 + 20 \sim 120 \text{ qcm ist.}$$

Die Dimensionen des Winkeleisens und der Gurtungsstreifen sind nun anzunehmen. Für das erstere ist eine Schenkellänge von 75 mm und eine Schenkeldicke von 10 mm passend, für die letzteren die Breite von 160 mm und 10 mm Dicke. Die Querschnittsfläche des Winkeleisens ist 15,1 qcm, die des Streifens 16 qcm. Ist b die Breite des Gurtungsbleches, so folgt

$$120 = b \,.\, 0{,}7 + 2 \,.\, 15{,}1 + 2 \,.\, 16,$$

daraus

$$b = 82{,}5 \text{ cm.}$$

Ausser auf Biegung ist der Querschnitt auch auf Druck beansprucht. Die vom Eigengewicht des Auslegers und von der Belastung ausgeübte Druckkraft ist 15 000 kg. Die Spannung in der gezogenen Gurtung wird dadurch um 7500 kg vermindert, die in der gedrückten Gurtung wird um soviel vermehrt. Dieser Vermehrung entspricht eine Vergrösserung des gedrückten Querschnittes um

$$f = \frac{7500}{550} \sim 14 \text{ qcm,}$$

welche Vergrösserung eigentlich schon vorhanden ist, da in der gedrückten Gurtung die Nietlöcher nicht als Verschwächung angesehen werden können. Thatsächlich wird die gedrückte Gurtung meist durch angenietete ⊥ Eisenschienen verstärkt.

Nach geschehener Aufzeichnung des Querschnittes mit den Nieten, berechnet man den Flächeninhalt der gezogenen Gurtung abzüglich der Nietlöcher und nach der Gleichung Nr. 5: $k = \frac{P}{F}$, worin P die Zugkraft $55\,209 - 7500 = 47\,709$ kg ist, den genauen Werth von k.

Nur mit Rücksicht auf die Festigkeit würde die Begrenzung des Auslegers angenähert der Form eines Trägers gleicher Biegungsfestigkeit anzupassen sein.

Träger von gleicher Biegungsfestigkeit.

Ein prismatischer Träger ist nnr im gefährlichen Querschnitt mit der zulässigen Spannung k beansprucht, in allen anderen Querschnitten geringer. Macht man die Querschnitte aber veränderlich, so dass in allen derselben die Spannung der äussersten Schichten gleich k ist, so hat man einen Träger gleicher Biegungsfestigkeit und man spart an Material und Gewicht. Die Bedingung ist die, dass $\sigma = \frac{M}{W}$ an jeder Stelle constant $= k$ ist.

1. Der Träger ist an einem Ende eingeklemmt, am freien Ende mit P belastet.

Ist am befestigten Ende h die Höhe des Querschnittes, b die Breite, und setzt man für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x vom freien Ende die Höhe gleich y, die Breite gleich z, so ist für diesen Querschnitt, weil $M = Wk$ und $W = \frac{zy^2}{6}$:

$$k = \frac{M}{W} = \frac{6\,Px}{z\,y^2}.$$

An der Befestigungsstelle ist

$$k = \frac{6\,Pl}{b\,h^2},$$

demnach ist

$$\frac{6\,Px}{zy^2} = \frac{6\,Pl}{bh^2},$$

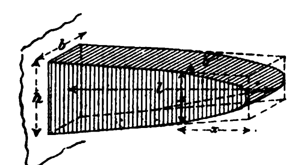
woraus

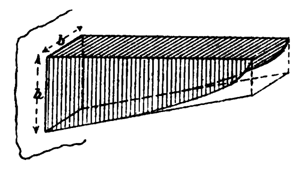
$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{bx}{lz}.$$

Soll die Breite z constant gleich b sein, so folgt

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{x}{l} \text{ oder die Höhe } y = h\sqrt{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

Die Begrenzungscurve ist daher eine Parabel mit der Maximalordinate $\frac{h}{2}$ oder eine halbe Parabel mit der Maximalordinate h.





Die Dimensionen h und b sind leicht zu berechnen aus $Pl = \frac{bh^2}{6} k$, wenn für b oder h ein passender Werth angenommen wird.

Sind J und M Trägheitsmoment und Moment an der Befestigungsstelle und haben J_1 und M_1 dieselbe Bedeutung für eine beliebige Stelle, so ist

$$\frac{M}{W} = \frac{M_1}{W_1} \text{ oder } \frac{Mh}{J} = \frac{M_1 y}{J_1}.$$

Nach Gl. 59 ist

$$\pm E J_1 \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 = \frac{M h J_1}{y J}$$

oder mit $M = Pl$

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Plh}{EJy}.$$

Nach Gl. 128 ist

$$\frac{h}{y} = \sqrt{\frac{l}{x}},$$

mithin

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pl}{EJ} \sqrt{\frac{l}{x}}$$

und

$$\pm \frac{dy}{dx} = \frac{Pl}{EJ} 2 \sqrt{l} \sqrt{x} + C.$$

Für $x = l$ ist

$$\frac{dy}{dx} = o,$$

demnach

$$C = -\frac{2 Pl^2}{EJ}$$

und

$$\pm \frac{dy}{dx} = \frac{Pl}{EJ} 2 \sqrt{l} \,.\, \sqrt{x} - \frac{2 Pl^2}{EJ}$$

$$\pm y = \frac{Pl}{EJ} \left(\frac{4}{3} \sqrt{l} \sqrt{x^3} - 2lx\right) + C_1.$$

Für $x = l$ ist $y = o$, also ist

$$C_1 = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EJ}$$

und die **Durchbiegung**

$$y = \frac{4}{3} \frac{Pl^3}{EJ} \left[\frac{3}{2} \frac{x}{l} - \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{l^3}} - \frac{1}{2}\right] \quad \ldots\ldots \quad (129)$$

Der Verticalkraft P wegen, die in jedem Querschnitt wirkt, ist am freien Ende eine Höhe $h_1 = \frac{P}{b\,kt}$ nöthig, worin kt die zulässige Beanspruchung für Schub ist. Die geradlinig begrenzte Ausführung ergiebt diese Höhe von selbst.

Soll die Höhe der Querschnitte constant gleich h sein, so ist nach der Gleichung $\frac{y^2}{h^2} = \frac{bx}{lz}$:

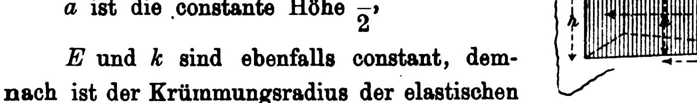
$$\frac{z}{b} = \frac{x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (130)$$

Die Begrenzung des Trägers ist demnach geradlinig. Die Breite am freien Ende $b_1 = \frac{P}{h\,kt}$.

Nach Gl. 17 ist $k = \frac{aE}{\varrho}$,

a ist die constante Höhe $\frac{h}{2}$,



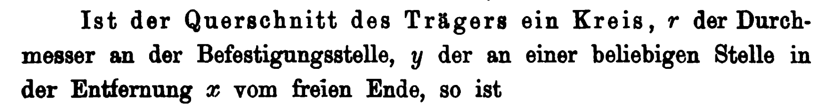


E und k sind ebenfalls constant, demnach ist der Krümmungsradius der elastischen Linie $\varrho = \frac{aE}{k}$ constant und die elastische Linie ist ein Kreisbogen. Mit Rücksicht darauf lässt sich leicht die Durchbiegung berechnen.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt $\delta : l = l : 2\varrho - \delta$, oder $l^2 = 2\varrho\delta - \delta^2$, worin δ^2 als sehr kleine Grösse höherer Ordnung vernachässigt werden kann.

Es ist also $\delta = \frac{l^2}{2\varrho}$ und da $\varrho = \frac{aE}{k}$, $k = \frac{M}{W}$, also $\varrho = \frac{aEW}{M} = \frac{EJ}{M}$ ist, so ist die Maximaldurchbiegung

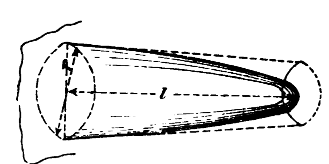
$$\delta = \frac{Ml^2}{2EJ} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (131)$$



Ist der Querschnitt des Trägers ein Kreis, r der Durchmesser an der Befestigungsstelle, y der an einer beliebigen Stelle in der Entfernung x vom freien Ende, so ist

$$\frac{32\,Pl}{r^3\pi} = \frac{32\,Px}{y^3\pi} \text{ oder } \frac{y^3}{r^3} = \frac{x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (132)$$

Die Begrenzung des Trägers ist eine cubische Parabel.



Die Maximaldurchbiegung erhält man durch zweimalige Integration der Gleichung

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{rM}{yEJ} = \frac{Pl}{EJ} \sqrt[3]{\frac{l}{x}}.$$

Es wird $y_{max.} = \frac{3}{5} P \frac{l^3}{EJ}$. . . . . (133)

2. Der Freiträger ist gleichmässig belastet.

Für den Querschnitt an der Befestigungsstelle ist

$$k = \frac{M}{W} = \frac{Ql}{2} \frac{6}{bh^2}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt ist

$$k = \frac{M_1}{W_1} = \frac{Qx^2}{2l} \frac{6}{zy^2}.$$

Es ist also

$$\frac{Qx^2 6}{2lzy^2} = \frac{Ql6}{2bh^2},$$

woraus

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{x^2 b}{zl^2}.$$

Ist die Höhe y des rechteckigen Querschnittes constant gleich h, so folgt hieraus

$$z = b \frac{x^2}{l^2} \quad \text{. . . . . (134)}$$

Ist die Breite z constant gleich b, so folgt die veränderliche Höhe

$$y = h \frac{x}{l} \quad \text{. . . . . (135)}$$

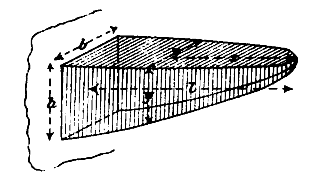
Im ersten Fall hat der Träger die Form eines parabolisch zugeschärften Keiles, im letzteren ist er geradlinig begrenzt.

Sollen beide Dimensionen z und y veränderlich sein, so dass $\frac{z}{y} = \frac{b}{h}$ ist, so folgt $z = \frac{yb}{h}$ und $y = \frac{zh}{b}$.

Mit Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung $\frac{y^2}{h^2} = \frac{x^2 b}{zl^2}$ folgt

$$\frac{y^3}{h^3} = \frac{x^2}{l^2} \text{ und } \frac{z^3}{b^3} = \frac{x^2}{l^2} \quad \text{. . . . . (136)}$$

Querschnitte und Grundriss sind hiermit leicht zu berechnen und aufzuzeichnen. Die Begrenzungscurven sind semicubische Parabeln.

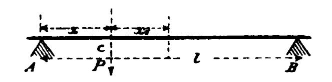


3. Der Träger ist an beiden Enden unterstützt und in der Mitte mit P belastet.

Jede Hälfte des Trägers ist genau so zu dimensioniren, wie ein an einem Ende eingeklemmter, am freien Ende belasteter Träger nach Gl. 128 oder 130. Die Belastung ist die Reaction $\frac{P}{2}$, die Länge ist $\frac{l}{2}$.

4. Ueber einen an den Enden unterstützten Träger bewegt sich die Einzellast P.

Das Moment in einem beliebigen Punkt ist dann am grössten, wenn die Last über dem Punkte sich befindet.



Das grösste Moment in c, $M = P \frac{(l - x)}{l} x$, ist also dann vorhanden, wenn P in c angekommen ist. Das grösste Moment in der Mitte der Trägerlänge ist $M = P \frac{l}{4}$, woraus mit $M = Wk$, nach angenommener Breite b die Höhe h zu berechnen ist.

Bei c sowohl, als in der Mitte, soll $\frac{M_1}{W_1}$ resp. $\frac{M}{W}$ constant gleich k sein. Ist die veränderliche Höhe y und die vorläufig veränderlich angenommene Breite z, so ist

$$\frac{M_1}{W_1} = P \frac{(l - x)}{l} x \frac{6}{z y^2} \text{ und } \frac{M}{W} = \frac{Pl}{4} \frac{6}{b h^2}.$$

Da der Scheitelpunkt der Begrenzungscurve in die Mitte fallen muss, so ist es zweckmässig, den Anfangspunkt des Coordinatensystems von A nach der Mitte zu verlegen, dadurch, dass man für x den Ausdruck $\left(\frac{l}{2} - x_1\right)$ setzt.

Es wird dann

$$\frac{M_1}{W_1} = P \frac{\left(\frac{l}{2} + x_1\right)\left(\frac{l}{2} - x_1\right)}{l} \frac{6}{z y^2} = 6 P \frac{\frac{l^2}{4} - x_1^2}{l z y^2}$$

und

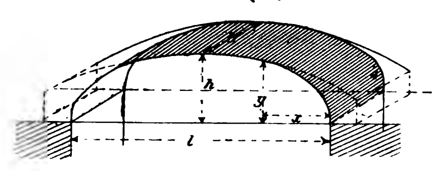
$$6\,P\,\frac{\frac{l^2}{4}-x_1^{\,2}}{l\,z\,y^2}=6\,P\,\frac{l}{4\,b\,h^2}$$

oder

$$\frac{z\,y^2}{b\,h^2}=\frac{l^2-4\,x_1^{\,2}}{l^2},$$

woraus bei constanter Breite $z=b$:

$$\frac{y^2}{h^2}=1-\frac{x_1^{\,2}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad \text{. . . . . (137)}$$



Die Begrenzungscurve des Trägers ist nach dieser Gleichung eine Ellipse mit den Halbaxen h und $\frac{l}{2}$. Wegen der Verticalkräfte in den Stützpunkten ist über diesen die Höhe

$$h_1=\frac{P}{2\,b\,k\,t}.$$

5. **Der an den Enden aufliegende Träger ist gleichmässig belastet.**

Für einen beliebigen Querschnitt ist

$$M_1=\frac{Q}{2}\,x-Q\,\frac{x}{l}\,\frac{x}{2}=Q\,\frac{x\,(l-x)}{2\,l}$$

und

$$k=\frac{M_1}{W_1}=Q\,\frac{x\,(l-x)}{2\,l}\,\frac{6}{z\,y^2}.$$

Für den gefährlichen Querschnitt in der Mitte ist

$$k=Q\,\frac{l}{8}\,\frac{6}{b\,h^2}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man

$$\frac{z\,y^2}{b\,h^2}=\frac{4\,l\,x-4\,x^2}{l^2}$$

und wenn man für x

$$\left(\frac{l}{2}-x_1\right)$$

setzt, so folgt wie im vorigen Fall

$$\frac{y^2}{h^2}+\frac{x_1^{\,2}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}=1 \quad \text{. . . . . (138)}$$

Die Begrenzungscurve ist eine Ellipse.

Eine Anwendung der Träger gleicher Biegungsfestigkeit sind die

Plattenfedern.

Eine prismatische Plattenfeder ist ein gewöhnlicher, am freien Ende belasteter Freiträger.

Nach der Gleichung $M = Wk$ ist die Tragfähigkeit

$$P = \frac{bh^2}{6l} k.$$

Die grösste Durchbiegung nach Gl. 58

$$\delta = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{3} = \frac{Pl^3}{E \frac{bh^3}{12} \cdot 3}$$

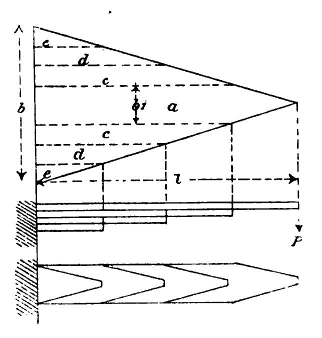
und da $k = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{\frac{bh^2}{6}}$ ist, so folgt $\delta = \frac{2}{3} \frac{l^2 k}{Eh}$.

Ist eine bestimmte Grösse für die Durchbiegung δ vorgeschrieben, so erhält man aus letzter Gleichung die Höhe h und mit Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung für P die Breite b der Feder. Für k ist entsprechend der Belastungsweise unter b (siehe Seite 5) 4300 kg pro qcm anzunehmen.

Soll die Feder eine Form gleicher Biegungsfestigkeit haben, so könnte man ihr bei constanter Dicke die Form eines Dreiecks geben, entsprechend der Gl. 130. Die Grundlinie b des Dreiecks ergiebt sich bei angenommener Dicke aus der Gleichung $Pl = \frac{bh^2}{6} k$.

Die Durchbiegung nach Gl. 131 mit $M = Pl$

$$\delta = \frac{Pl^3}{2\,EJ} = \frac{6\,Pl^3}{Ebh^3} \text{ und mit } Pl \frac{6}{bh^2} \text{ für } k, \text{ wird } \delta = \frac{l^2 k}{Eh}.$$



Eine derartige Dreieckfeder ersetzt man aber, wenn sie gross ausfällt, durch einzelne unter einandergelegte Platten, so dass eine zusammengesetzte Feder von derselben Tragfähigkeit entsteht.

Denkt man sich die Dreieckfeder in $2n$ gleichbreite Streifen zerlegt, so kann man dieStreifen cc zusammen unter a, die Streifen dd zummen unter c u. s. w. legen, wobei die Tragfähigkeit jedenfalls

dieselbe bleiben wird. Ist die Breite der untereinanderliegenden Streifen b_1, die Höhe derselben h, so ist

$$Pl = Wk = \frac{n b_1 h^2}{6} k$$

und bei angenommenen Dimensionen b_1 und h ist die Zahl der Streifen

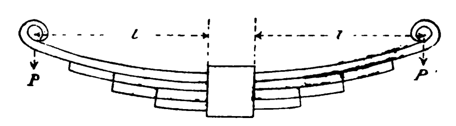
$$n = \frac{6\,Pl}{b_1 h^2 k}.$$

Zur Bestimmung der einzelnen Längen dient dann die Aufzeichnung des Dreiecks mit der Grundlinie nb_1 und der Höhe l.

Die Durchbiegung ist auch bei dieser Feder $\delta = \frac{l^2 k}{Eh}$.

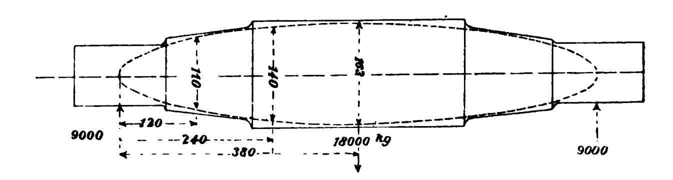
Bei gegebener Durchbiegung berechnet man aus letzter Gleichung h, nimmt b_1 passend an und berechnet dann n.

Sollen die Platten nicht dreieckig zugespitzt, sondern rechteckig sein, so schärft man sie an der unteren Seite nach der cubischen Parabel und berechnet sie nach denselben Formeln.



Nebenstehend skizzirte Feder kann man als aus zweien solcher zusammengesetzten Federn bestehend annehmen und die beiden Hälften nach obigen Formeln berechnen. Andere Anwendungen der Träger gleicher Biegungsfestigkeit sind **Achsen** und **Wellen**.

Beispiel. Die Schwingungsachse eines Dampfmaschinen-Balanciers ist zu berechnen. Der Achsendruck beträgt 18000 kg, die Entfernung der Lagermittel ist 760 mm, die Länge der Balanciernabe 300 mm. Material: Gussstahl. Das Eigengewicht der Achse ist schätzungsweise als in der Mitte concentrirt, in den Achsendruck mit eingerechnet.



Die Reactionen sind 9000 kg.

Das Maximalmoment in der Mitte ist

$$M = 9000 \,.\, \frac{760}{2} = 3\,420\,000.$$

Nach der Gleichung $M = Wk$ ist mit D als grössten Durchmesser und mit $k = 8$ kg, dem verlangten Sicherheitsgrad $\frac{K}{k} \sim 9$ entsprechend

$$3\,420\,000 = \frac{D^3 \pi}{32} \cdot 8,$$

woraus

$$D = \sqrt[3]{\frac{3\,420\,000 \cdot 32}{8 \cdot \pi}} = 163.$$

An einer anderen Stelle in der Entfernung 120 mm vom freien Ende, also von A, ist nach Gl. 132

$$(2y)^3 = D^3 \frac{x}{l} \text{ oder, da } x = 120, \; l = 380,$$

der Durchmesser

$$2y = D \sqrt[3]{\frac{120}{380}} = 163 \cdot 0{,}68 = 110{,}8.$$

An einer dritten Stelle, in der Entfernung 240 von A, ist der Durchmesser

$$2y_1 = D \sqrt[3]{\frac{240}{380}} = 163 \cdot 0{,}859 = 140 \text{ mm}.$$

Mit dem Scheitelpunkt in A sind nun 4 Punkte der cubischen Parabel, die der Form gleicher Festigkeit entspricht, gegeben und man kann mit diesen leicht die Parabel aufzeichnen. Da die Belastung symmetrisch ist, so haben beide Achsenhälften gleiche Dimensionen.

Die geradlinige äussere Form der Achse, die bedingt ist durch den Zapfendurchmesser, den Bundhöhen und durch die Länge des für die aufsitzende Nabe cylindrischen Theiles, darf an keiner Stelle in die Parabel einschneiden, sie darf diese nur berühren.

Ist l_1 die Länge des Zapfens, d dessen Durchmesser und macht man das Verhältniss $\frac{l_1}{d} = 1{,}6$, so ist, da der Zapfen als gleichmässig belasteter Freiträger angesehen werden kann,

$$9000 \frac{l_1}{2} = \frac{d^3 \pi}{32} \cdot 8,$$

oder

$$9000 \frac{l_1}{d} = \frac{d^2 \pi}{16} \cdot 8,$$

woraus

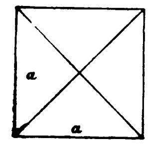
$$d = \sqrt{\frac{9000 \cdot 16}{\pi \cdot 8} \cdot 1{,}6} \sim 95 \text{ mm}, \; l_1 = 1{,}6 \cdot 95 \doteq 152 \text{ mm}.$$

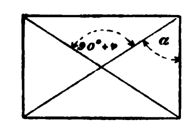
Der Zapfen müsste entsprechend verstärkt werden, wenn seine Begrenzung in die Parabel einschneiden würde, was hier nicht der Fall ist.

IV. Abschnitt.

Vor der Behandlung der weiteren Abschnitte sind folgende wichtigen Untersuchungen nöthig.

Einfluss der Schub- oder Tangentialspannung und Gleitungsmodul.





Ein auf Zug beanspruchter Stab sei ein Würfel von der Seitenlänge a. Der Würfel wird sich unter dem Einfluss der Kraft P verlängern, wobei der Winkel der Diagonalen von 90^0 in den Winkel $90^0 + \varphi$ übergehen und der Querschnitt vertical zur Kraftrichtung sich verkleinern wird, d. h. der Körper erleidet neben der Längenausdehnung eine Quercontraction.

In den Diagonalebenen wird eine Schubspannung entstehen, deren Grösse leicht zu bestimmen ist. Die Spannung in der Seitenfläche des Würfels ist nach Gl. 1: $\sigma = \frac{P}{a^2}$. In der Diagonalebene von dem Flächeninhalt $a^2 \sqrt{2}$ vertheilt sich die Kraft P auf diesen und es kommt auf die Flächeneinheit die Grösse $p = \frac{P}{a^2 \sqrt{2}}$.

Diese Kraft zerlegt sich in zwei Componenten, deren eine in die Diagonalebene fällt, die also Schub- oder Tangentialspannung ist.

Die Grösse derselben ist

$$\tau = p \cos . 45^0 = \frac{P}{a^2 \sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{P}{2 a^2}.$$

Es ist also $\frac{\sigma}{\tau} = 2$, d. h. die Normalspannung in der Seiten-

fläche ist doppelt so gross als die Tangentialspannung in der Diagonalebene.

Die Längenausdehnung ist nach Gl. 2

$$\varDelta a = \frac{P a}{E F}.$$

Ist $a = 1$, so ist auch die Fläche $F = 1$ und $\varDelta a = \frac{P}{E}$.

Die Länge der Seite ist also $a + \varDelta a = 1 + \frac{P}{E}$ oder, da die Kraft pro Flächeneinheit die Spannung σ ist, so ist die Länge $1 + \frac{\sigma}{E} = 1 + \varepsilon$ (siehe Gl. 3).

Die Quercontraction ist nach Versuchen von Redtenbacher, Poisson u. a. ein bestimmter Bruchtheil m von der Längenausdehnung.

m ist der Quercontractionscoefficient und dieser ist für Metalle $= \frac{1}{4}$.*)

Um den Winhel φ durch die Schubspannung auszudrücken, sei $\varphi = \tau \frac{1}{G}$ gesetzt, worin G ein noch zu bestimmender Factor ist.

Der Winkel α ist $45^0 + \frac{\varphi}{2}$ und es ist (siehe Figur):

$$tg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \varepsilon}{1 - m\,\varepsilon},$$

denn die verkürzte Rechteckseite hat die Länge $1 - m\,\varepsilon$.

Es ist aber

$$tg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{tg\,45^0 + tg\,\frac{\varphi}{2}}{1 - tg\,45^0\,tg\,\frac{\varphi}{2}}$$

und da $\frac{\varphi}{2}$ ein sehr kleiner Winkel ist, man also für $tg\,\frac{\varphi}{2}$ den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ setzen kann, so folgt mit $tg\,45^0 = 1$

$$\frac{1 + \frac{\varphi}{2}}{1 - \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - m\,\varepsilon},$$

*) Neuere Versuche von Werthheim haben m etwas kleiner ergeben.

woraus mit Vernachlässigung der kleinen Grössen höherer Ordnung $m\,\varepsilon\,\frac{\varphi}{2}$ und $-\varepsilon\,\frac{\varphi}{2}$:

$$\varphi = \varepsilon\,(1+m) = \frac{\sigma}{E}\,(1+m), \text{ oder mit } \sigma = 2\,\tau$$

$$\varphi = 2\,\frac{\tau}{E}\,(1+m) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (139)$$

Durch ähnliche Untersuchung erhält man für eine beliebige andere nicht diagonale Ebene denselben Ausdruck für die Verschiebung φ, es folgt daher der Satz:

Die Verschiebung φ einer Ebene ist gleich dem Product aus der Schubspannung in der Ebene und dem Factor $\frac{2\,(1+m)}{E}$.

Nach der Gleichung $\varphi = \tau\,\frac{1}{G}$ folgt hiermit $G = \frac{\tau}{\varphi} = E\,\frac{1}{2\,(1+m)}$

und für $m = \frac{1}{4}$:

$$G = E\,\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{5}\,E \quad \ldots \ldots \ldots \quad (140)$$

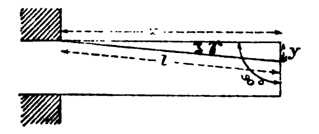
Diesen Werth G, der für Beanspruchung auf Schub dieselbe Bedeutung hat, als der Elasticitätsmodul E für Beanspruchung auf Zug und Druck, nennt man den **Gleitungsmodul.**

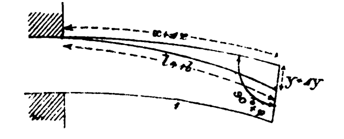
Die Gleichung $\varphi = \frac{\tau}{G}$ hat für Schub ganz ähnliche Bedeutung wie $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ für Zug und Druck.

Zusammensetzung von Schub- oder Tangentialspannung und Normalspannung.

In einem auf Biegung beanspruchten Stab wirken Normal- und Tangential- oder Schubspannungen. Beide sind sowohl in den Stabquerschnitten, als auch in den dazu senkrechten Stabebenen nicht gleichmässig vertheilt. σ wächst von dem Werthe Null in der neutralen Axe bis zur äussersten Faserschicht und von dem Querschnitt mit dem Moment = Null bis zu dem Querschnitt mit dem Maximalmoment und τ wächst allgemein von der äussersten Faserschicht bis zur neutralen Axe. Beide sind rechtwinklig zu einander und es wird

deshalb in irgend einem Punkt oder Stabelement die Richtung der resultirenden Maximalspannung einem gewissen Winkel entsprechen. Denkt man sich nun durch ein unendlich kleines Stabelement eine Faser in der Richtung der resultirenden Spannung gelegt, so ist die Spannung für diese Faser Normalspannung und es wird sich der Richtungswinkel berechnen lassen, für den die Spannung ein Maximum wird, sowie die Grösse dieser Maximalspannung selbst.





l ist die unter dem vorläufig beliebig angenommenen Richtungswinkel γ geneigte Faser von der Länge l. Bei der Belastung des Stabes werden die Fasern l und x verlängert um $\varDelta l$ und $\varDelta x$ durch ihre Normalspannungen. Der Stab erleidet dabei eine Quercontraction; es wird also die Faser y verkürzt um $\varDelta y$ und der Winkel 90^0 geht durch die Schubkraft über in $90^0 + \varphi$. Es ist nun

$$(l + \varDelta l)^2 = (x + \varDelta x)^2 + (y - \varDelta y)^2 - 2 \cos (90^0 + \varphi) (x + \varDelta x) \cdot (y - \varDelta y).$$

Hierin ist $-\cos (90^0 + \varphi) = \sin \varphi$ und da φ ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man $\sin \varphi = \varphi$ (Bogen) setzen. Es folgt also

$$l^2 + 2 l \varDelta l + \underline{\varDelta l^2} = x^2 + 2 x \varDelta x + \underline{\varDelta x^2} + y^2 - 2 y \varDelta y + \underline{\varDelta y^2} + \varphi (2xy + \underline{2x\varDelta y} - \underline{2y\varDelta x} + \underline{2\varDelta x \varDelta y}).$$

Mit Weglassung der unterstrichenen sehr kleinen Grössen höhrer Ordnung und mit Rücksicht darauf, dass $x^2 + y^2 = l^2$ ist, erhält man nach Division der Gleichung durch l^2:

$$\frac{\varDelta l}{l} = \frac{x^2 \varDelta x}{l^2 x} - \frac{y^2 \varDelta y}{l^2 y} + \frac{x y \varphi}{l^2}$$

und mit $\frac{x}{l} = \cos \gamma$, $\frac{y}{l} = \sin \gamma$ folgt, wenn man ausserdem die ganze Gleichung mit E multiplicirt,

$$E \frac{\varDelta l}{l} = E \cos^2 \gamma \frac{\varDelta x}{x} - E \sin^2 \gamma \frac{\varDelta y}{y} + E \varphi \cos \gamma \cdot \sin \gamma.$$

$E \frac{\varDelta l}{l}$, $E \frac{\varDelta x}{x}$ und $E \frac{\varDelta y}{y}$ ist nach Gl. 2, $\varDelta l = \frac{Pl}{FE}$, allgemein gleich $\frac{P}{F}$, wenn P die Zugkraft in der Faser, F deren Querschnitts-

fläche ist. $\frac{P}{F}$ ist aber nach Gl. 1 gleich der Normalspannung in der Faser.

Es soll nun die Normalspannung in der Faser l mit Σ, die Normalspannung in der Faser x mit σ bezeichnet werden. $\frac{\Delta y}{y}$ ist für die Faser y die Quercontraction und da diese der $m$te Theil der Längenausdehnung $\frac{\Delta x}{x}$ ist, so ist

$$E \frac{\Delta y}{y} = Em \frac{\Delta x}{x} = m \sigma.$$

Nach Gl. 139 ist ferner die Verschiebung $\varphi = 2 \frac{\tau}{E} (1 + m)$, woraus $E\varphi = 2 \tau (1 + m)$.

Mit Einsetzung dieser Werthe folgt

$\Sigma = \sigma \cos^2 \gamma - \mathrm{m}\, \sigma \sin^2 \gamma + 2 \tau (1 + m) \sin \gamma \cos \gamma$ (1).

Das Maximum dieser Spannung in der Faser l wird nun einer gewissen Grösse des Winkels γ entsprechen Man erhält bekanntlich das Maximum und das Minimum eines Werthes, wenn man denselben differenziirt, den Differenzialquotienten = Null setzt und daraus den Werth der Veränderlichen entwickelt.

Die Differenziation ergiebt nach einigen Reductionen und mit $2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma = \sin 2 \gamma$:

$$- \sigma \sin 2 \gamma + 2 \tau \cos 2 \gamma = o,$$

oder

$$tg \,.\, 2 \gamma = \frac{2\tau}{\sigma}.$$

Diesem Werth der Tangente entsprechen 2 Winkel, der Winkel 2γ und der Winkel $180^0 + 2 \gamma$, daraus folgt der eine Winkel γ, der Σ zum Maximum, und der andere Winkel $90^0 + \gamma$, der Σ zum Minimum macht.

Für die neutrale Axe ist $\sigma = o$, demnach

$$tg\, 2 \gamma = \frac{2 \tau}{o} = \infty$$

und der Winkel

$$2\gamma = 90^0 \text{ oder } 270^{\prime\prime} \text{ und } \gamma = 45^0 \text{ oder } 135^0.$$

Für die von der neutralen Axe entferntesten Fasern ist

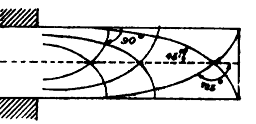
$$\tau = o,\ tg\, 2 \gamma = \frac{o}{\sigma} = o,$$

woraus

$$\gamma = o \text{ und } 90^0.$$

Von der neutralen Axe aus fortschreitend nach den äussersten Fasern ändert sich also die Richtung der Spannung von 45^0 oder 135^0 bis zu 0^0. Dem Winkel 135^0 entspricht negative Spannung oder Druck. Der Verlauf dieser Spannungsrichtungen lässt sich durch Linien darstellen, die mit der Neigung Null beginnend, die neutrale Axe unter 45^0 und die andere äusserste Faser unter 90^0 schneiden.

Die nach unten gekrümmten Linien entsprechen $+ \sigma$ (Zug). Die nach oben gekrümmten entsprechen $- \sigma$ (Druck).



Der Werth von Σ für den Winkel γ sei mit Σ_1, der für den Winkel $\gamma + 90^0$ mit Σ_2 bezeichnet; dann entspricht Gleichung (1) dem Werthe Σ_1, und aus derselben Gleichung folgt

$$\Sigma_2 = \sigma \sin^2 \gamma - m \sigma \cos^2 \gamma - 2 \tau (1 + m) \cos \gamma \sin \gamma \; (2).$$

Die Addition der Gleichungen (1) und (2) ergiebt

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \sigma - m \sigma = \sigma (1 - m) \; (3), \quad \text{denn } \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1.$$

Die Subtraction der Gleichungen (1) und (2) ergiebt

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \sigma (1 + m) [\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma + 4 \tau (1 + m) \sin \gamma \cos \gamma]$$
$$= \sigma (1 + m) \cos 2 \gamma + 2 \tau (1 + m) \sin 2 \gamma$$
$$= (1 + m) \cos 2 \gamma (\sigma + 2 \tau \, tg \, 2 \gamma).$$

Nach einem Satze der Trigonometrie ist

$$\cos 2 \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 \, 2 \gamma}}.$$

Mit diesem Ausdruck und mit gleichzeitiger Einsetzung des erhaltenen Werthes von $\frac{2\tau}{\sigma}$ für $tg \, 2 \gamma$ folgt

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = (1 + m) \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 4\tau^2}} \left(\sigma + \frac{4\tau^2}{\sigma}\right),$$

oder, da

$$\sigma + \frac{4\tau^2}{\sigma} = \sqrt{\frac{(\sigma^2 + 4\tau^2)^2}{\sigma^2}}$$

ist, so folgt

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = (1 + m) \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Nach Gl. (3) ist aber

$$\Sigma_2 = - \Sigma_1 + \sigma (1 - m),$$

damit ergiebt sich

$$\Sigma_1 = \frac{1 - m}{2} \sigma + \frac{1 + m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

und

$$\Sigma_2 = \frac{1-m}{2}\sigma - \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Σ_1 ist Maximum, Σ_2 ist Minimum.

Für $m = \frac{1}{4}$ folgt

$$\Sigma_{max.} = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (141)$$

Diese Spannung hat die Bedeutung einer Normalspannung, sie darf den zulässigen Werth k nicht überschreiten. In der neutralen Axe ist $\sigma = o$ und man erhält mit Einsetzung dieses Werthes

$$\tau = \frac{4}{5}\Sigma_{max.}$$

Der zulässige Maximalwerth von τ ist aber kt und der von $\Sigma_{max.} = k$, folglich ist

$$kt = \frac{4}{5}k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (142)$$

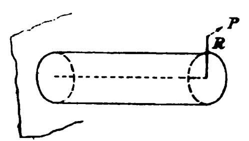
Das letzte Resultat bedeutet allgemein: Die zulässige Grösse der Schubspannung ist $\frac{4}{5}$ der zulässigen Grösse der Normalspannung.

Die allgemeine Geltung geht aus der Bedeutung von Σ hervor, als die Normalspannung, welche die gleiche deformirende Wirkung auf ein Stabelement ausübt, wie die Spannungen σ und τ zusammen.

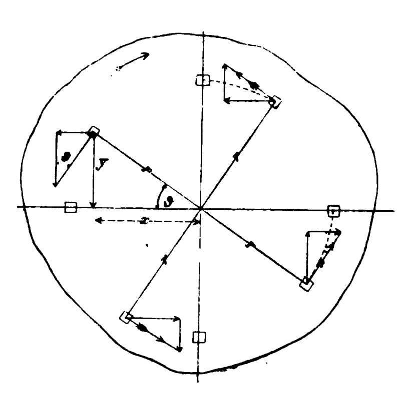
Was den Werth von τ in Gl. 141 betrifft, wenn es sich um einen auf Biegung und Schub oder auf Zug oder Druck und Schub beanspruchten Constructionstheil handelt, so ist es nicht streng richtig $\tau = \frac{P}{F}$ zu setzen und es kann in gewissen Fällen empfehlenswerth sein, die in der Anmerkung, Seite 16, angegebenen Gleichungen zu berücksichtigen. Bei Biegung und Schub wird der Werth $\tau = \frac{P}{F}$ immer genügende Sicherheit bieten, da in dem Falle die Maximalspannungen nie zusammen fallen.

V. Abschnitt.

Torsions- oder Drehungsfestigkeit.



Die äusseren Kräfte lassen sich durch ein verdrehendes Moment M ersetzen, dessen Ebene dem Querschnitt des Stabes parallel ist.



Nebenstehende Figur ist der Querschnitt eines auf Drehung beanspruchten stabförmigen Körpers. Das verdrehende Moment bewirkt, dass zwei benachbarte Querschnitte ihre gegenseitige Lage verändern, durch Verschiebung um den Drehungsmittelpunkt.

ϑ (theta) sei der Winkel, um den die ursprünglich sich deckenden Flächenelemente df sich gegenseitig verschoben haben; d. h. df hat sich um die Bogenlänge des Winkels ϑ aus seiner früheren Lage entfernt. Der Verschiebung entgegen wirkt die Schubspannung τ und diese wächst proportional mit der Grösse der Verschiebung innerhalb der Elasticitätsgrenze, also proportional mit dem Abstand r des Flächenelementes vom Drehungsmittelpunkt.

Ist τ_0 die Spannung im Abstande 1 vom Drehungsmittelpunkt, so ist

$$\tau_0 : \tau = 1 : r,$$

woraus

$$\tau = \tau_0 \, r.$$

τ ist die Spannung pro Flächenheit. Die Spannung im Flächenelement df ist τdf oder $\tau_0 r df$.

Bei Gleichgewichtszustand muss

1) Die Summe der Momente der äusseren Kräfte gleich der Summe der Momente der inneren Spannungen sein.

Das Moment der inneren Spannung eines Flächenelementes ist

$$\tau \, df \, r = \tau_0 \, r \, df \, r,$$

die Summe dieser ist das Integral davon. Die Bedingung lautet also

$$M = \int \tau_0 \, r^2 \, df.$$

Damit eine Verschiebung zweier unendlich nahe gelegener Querschnitte in der Richtung der Coordinatenaxen nicht stattfindet, muss

2) die Summe der verticalen inneren Spannungen gleich Null sein und es muss

3) die Summe der horizontalen inneren Spannungen gleich Null sein.

Die Spannungen $\tau_0 \, r \, df$ sind rechtwinklig zu den Abständen r vom Drehungsmittelpunkt, entgegengesetzt dem Drehungssinn gerichtet. Die Zerlegung in die Horizontal- und die Verticalcomponenten ergiebt, dass die ersteren gleich $\tau_0 \, r \, df \sin \vartheta$ und die letzteren gleich $\tau_0 \, r \, df \cos \vartheta$ sind, mit Rücksicht darauf, dass im zweiten Quadranten der Winkel, den die Richtung r mit der horizontalen Axe einschliesst, $90^0 + \vartheta$, im dritten Quadranten $180^0 + \vartheta$ und im vierten Quadranten $270^0 + \vartheta$ ist.

Die zweite und dritte Bedingung lauten also

$$\Sigma \tau_0 \, r \, df \cos \vartheta = o \text{ und } \Sigma \tau_0 \, r \, df \sin \vartheta = o.$$

τ_0 ist constant und $r \cos \vartheta$, resp. $r \cos (90^0 + \vartheta)$ u. s. w. sind die Abscissen x der Flächenelemente, $r \sin \vartheta$, $r \sin (90^0 + \vartheta)$ u. s. w. sind die Ordinaten y der Flächenelemente.

Die Summen der Spannungscomponenten aller der über den ganzen Querschnitt ausgebreiteten Flächenelemente sind nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung demnach

$$\tau_0 \int_0^f x \, df = o \text{ und } \tau_0 \int_0^f y \, df = o.$$

$\int_0^f x \, df$ und $\int_0^f y \, df$ sind aber die statischen Momente der Fläche, bezogen auf die x-Axe und auf die y-Axe, die sich beide im Drehungsmittelpunkt schneiden. Da die Summe dieser statischen Momente gleich Null sein soll, so müssen die Axen mit den Schwerlinien zusammenfallen, ihr Schnittpunkt muss im Schwerpunkt liegen und es folgt der Satz:

Der Drehungsmittelpunkt eines Querschnittes fällt mit dem Schwerpunkt desselben zusammen und die Drehungsaxe des Stabes mit der Schweraxe.

Nach der ersten Gleichgewichtsbedingung ist

$$M = \tau_0 \int r^2 \, df, \text{ denn } \tau_0 \text{ ist constant.}$$

$\int r^2\, df$ ist aber das polare Trägheitsmoment J_p. Ist a der Abstand der äussersten Faser von der Drehungsaxe, so ist $a\,\tau_0$ die Spannung in derselben, die den zulässigen Werth kt nicht überschreiten soll. Es folgt somit

$$\tau_0 = \frac{kt}{a}$$

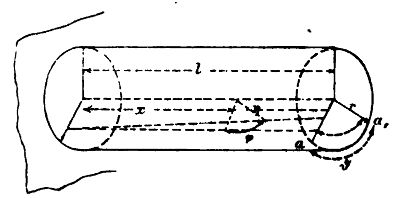
und

$$M = \frac{J_p}{a}\, kt = W_p\, kt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (143)$$

unter W_p das polare Widerstandsmoment des Querschnittes verstanden. Aus dieser Gleichung für die Drehungsfestigkeit sind die Querschnittsdimensionen, oder die Tragfähigkeit P, oder die maximale Spannung kt zu berechnen.

Torsions- oder Drehungswinkel.

Setzt man voraus, dass bei der Beanspruchung des Stabes durch ein verdrehendes Moment die Entfernungen der Querschnittselemente vom Drehungsmittelpunkt constant bleiben, und ist φ der Winkel, um den sich ein Punkt im Abstand r_1 von der Drehungsaxe verschoben hat, in einem Querschnitt, der in der Entfernung x vom befestigten Ende liegt, ist ferner ϑ der Winkel, um



den sich der gleichliegende Punkt in dem um l entfernten Querschnitt aus der ursprünglichen Lage bewegt hat, so sind φr_1 und ϑr_1 die Kreisbögen, welche die beiden Punkte bei der Verdrehung durchlaufen haben und es ist

$$\varphi r_1 : \vartheta r_1 = x : l.$$

Setzt man die Entfernung $x = 1$ und den Abstand $r_1 = 1$, so folgt $\vartheta = \varphi l$. Ein andrer Punkt im Umfange des um l entfernten Querschnittes mit dem Abstande r vom Drehungsmittelpunkt durchläuft den Bogen $\widehat{aa_1} = \vartheta r$ und es ist demnach

$$\widehat{aa_1} = \varphi l r.$$

Der Verschiebungswinkel einer Ebene (vergl. S. 99) ist allgemein gleich $\frac{\tau}{G}$, wenn τ die Schubspannung in der Ebene ist. Die

Grösse des Winkels wächst mit der Länge des auf Verdrehung beanspruchten Stabes. Ein um die unendlich kleine Entfernung dx vom festgehaltenen Ende entfernter Querschnitt erleidet die Verschiebung $\frac{\tau}{G}\,dx$. In der Entfernung $x = 1$ vom festen Ende ist die Summe der $dx = 1$, demnach ist hier der Verschiebungswinkel $\varphi = \frac{\tau}{G}$ und der Bogen

$$\widehat{a\,a_1} = \frac{\tau}{G}\,lr.$$

Es besteht aber die Proportion

$$\widehat{a\,a_1} : r\pi = \vartheta^0 : 180^0,$$

daraus folgt der Winkel ϑ in Graden:

$$\vartheta^0 = \widehat{a\,a_1}\,\frac{180}{\pi r}$$

und daraus der Bogen

$$\widehat{a\,a_1} = \vartheta^0\,\frac{\pi r}{180}.$$

Mit Einsetzung dieses Werthes folgt für den grössten Verdrehungswinkel des Stabes

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\tau}{G}\,l.$$

τ ist die Spannung in der Entfernung $r_1 = 1$ vom Drehungsmittelpunkt.

In der Entfernung r der äussersten Faser soll die Spannung aber den zulässigen Werth kt haben, es ist also $r\tau = kt$ oder $\tau = \frac{kt}{r}$ und

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\,\frac{ktl}{Gr} \quad \ldots \quad (144)$$

Nach Gl. 143 ist $kt = \frac{Mr}{J_p}$, damit folgt

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\,\frac{Ml}{GJ_p} \quad \ldots \quad (145)$$

Folgende specielle Fälle sollen die Anwendung der erhaltenen Resultate zeigen.

1. Der an einem Ende festgehaltene Stab von kreisförmigem Querschnitt ist am andern Ende mit dem Moment PR auf Drehung beansprucht.

Ist d der Durchmesser, so ist nach der Gleichung $M = W_p\, kt$:

$$PR = d^3 \frac{\pi}{16} kt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (146)$$

und der Verdrehungswinkel nach Gl. 145

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{Ml \,.\, 32}{G d^4 \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (147)$$

Beispiel 1.

Der Widerstand an dem Bohrstahl einer Cylinderbohrmaschine sei 1000 kg. Die Länge des Stahles entsprechend dem Radius des zu bohrenden Cylinders sei 200 mm, die Länge der den Stahl haltenden Bohrstange 1 m.

Wie gross muss der Durchmesser der Bohrstange sein?

Damit der Drehungswinkel der Stange ein sehr kleiner wird, sei für kt nur 5 kg pro qmm angenommen.

Nach der Gleichung $M = W_p\, kt$ ist

$$200 \,.\, 1000 = \frac{d^3 \pi}{16}\, 5,\ d = \sqrt[3]{\frac{200 \,.\, 1000 \,.\, 16}{\pi \,.\, 5}}$$

$$d = \sqrt[3]{203636} \backsim 60 \text{ mm}.$$

Der Drehungswinkel ist nach Gl. 145

$$\vartheta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{Ml}{G J_p} = \frac{180 \,.\, 1000 \,.\, 200 \,.\, 1000}{\pi \frac{2}{5} \,.\, 20000 \,.\, 60^4 \frac{\pi}{32}} = 1{,}12^0.$$

Dem entspricht ein Ausweichen der Bohrstahlspitze um

$$\frac{200 \,.\, \pi}{180} \,.\, 1{,}12 = 3{,}9 \text{ mm}.$$

Nimmt man nur $0{,}5^0$ für ϑ als zulässig an, so erhält man aus der Gleichung $0{,}5 = \dfrac{180 \,.\, 1000 \,.\, 200 \,.\, 1000}{\pi \frac{2}{5} \,.\, 20000\, d^4 \frac{\pi}{32}}$

$$d = 74 \text{ mm}.$$

Beispiel 2.

Es soll eine Formel zur Berechnung von Transmissionswellen entwickelt werden, für die ein Verdrehungswinkel von $^1/_4{}^0$ pro 1 m Länge als zulässig angenommen werden kann.

Aus Gl. 147 folgt

$$d^4 = \frac{180\ M\ l\ 32}{\vartheta^0\ G\ \pi^2},\quad d^4 = 583{,}7\ \frac{M\ l}{\vartheta^0\ G}.$$

Ist in dieser Gleichung als Maasseinheit das Millimeter angenommen, so ist es vortheilhaft l in Meter auszudrücken, also mit 1000 zu multipliciren. Es kann dann $\vartheta^0 = {}^1/_4\ l$ gesetzt werden und man erhält

$$d^4 = 583700\ \frac{M\ l^m}{0{,}25\ l\ 8000},\quad d = \sqrt[4]{\frac{5837\ M}{0{,}25\ .\ 80}}$$

oder

$$d = 4{,}13\ \sqrt[4]{PR}\ \text{in Millimeter.}$$

Beispiel 3.

Es soll die Formel zur Berechnung einer kurzen, nicht auf Biegung beanspruchten Welle aufgestellt werden.

Ist PR das Drehungsmoment an der Welle, so ist

$$PR = \frac{d^3\pi}{16}\ k,\ \text{woraus}\ d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi k}\ PR}.$$

2. Der an beiden Enden festgehaltene, in der Mitte mit PR auf Verdrehung beanspruchte Stab hat kreisringförmigen Querschnitt.

Jede Hälfte des Stabes, auf welche das Moment $\frac{PR}{2}$ kommt, verhält sich wie der an einem Ende festgehaltene, am andern Ende auf Verdrehung beanspruchte Stab.

Das polare Widerstandsmoment des Kreisringes ist, mit D als äusseren, d als inneren Durchmesser

$$W_p = \frac{D^4 - d^4}{\frac{D}{2}}\ \frac{\pi}{32}.$$

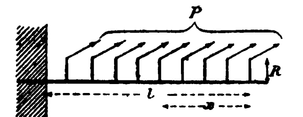
Für die Tragfähigkeit ist nach Gl. 143

$$\frac{PR}{2} = \frac{D^4 - d^4}{D}\ \frac{\pi}{16}\ .\ kt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

Der Verdrehungswinkel nach Gl. 144

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\ \frac{kt\ l}{G\ \frac{D}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

3. Der an einem Ende festgehaltene Stab ist in seiner ganzen Länge gleichmässig mit dem Drehungsmoment M beansprucht.



Für eine Strecke von der beliebigen Länge x ist das Moment $M_x = PR\,\frac{x}{l}$.

Für $x = l$ ist das Moment $M = PR$.

Der gefährliche Querschnitt liegt also an dem festgehaltenen Ende und es ist für denselben

$$PR = W_p\,kt.$$

Für eine unendlich kleine Strecke von der Länge dx ist nach Gl. 145 der unendlich kleine Drehungswinkel

$$d\vartheta = \frac{180}{\pi}\,\frac{M_x}{G\,J_p}\,d\,x = \frac{180}{\pi}\,\frac{M\,x\,dx}{G\,J_p\,l}.$$

Der ganze Winkel oder die Summe aller der unendlich kleinen Winkel ist

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\,\frac{M}{J_p\,G\,l}\int_0^l x\,dx = \frac{180\,M\,l}{2\pi\,J_p\,G} \quad \ldots\ldots \quad (150)$$

Derselbe ist also nur halb so gross, als der bei dem die verdrehende Kraft am freien Ende angreift.

Für Körper mit anderem als kreis- und kreisringförmigem Querschnitt geben die entwickelten Formeln keine richtigen Resultate mehr, und zwar um so weniger, je grösser das Verhältniss der Höhe zur Breite des Querschnittes ist.

Die genauere Theorie der Drehungsfestigkeit, deren Behandlung ausserhalb des gesteckten Zieles liegt, hat überhaupt bisher nur solche Querschnitte behandelt, die rechtwinklige Symmetrieaxen haben und nicht rippenförmig sind. Sie zeigt, dass die Schubspannung allgemein in den Endpunkten der kleinen Axe ein Maximum ist. Hieraus geht hervor, dass der Kreis- und der Kreisringquerschnitt bezügl. gleichmässiger Vertheilung der Spannung und bester Ausnutzung des Materials der günstigste ist.

Zur Berechnung der auf Verdrehung beanspruchten Körper mit rechteckigem Querschnitt, mit der Höhe h, der Breite b, seien die Resultate der genaueren Theorie hier angegeben. Es ist

$$PR = \frac{2}{9}\,hb^2\,kt$$

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\,\frac{PR}{G}\,\frac{b^2 + h^2}{b^3\,h^3}.$$

Unsymmetrisch zur Biegungsachse gestaltete, oder rippenförmige Körper können wenigstens mit angenäherter Genauigkeit nach den letzten oder nach den entwickelten Formeln berechnet werden.

Körper von gleicher Drehungsfestigkeit.

Die Körper von gleicher Drehungsfestigkeit sind so dimensionirt, dass in den meist beanspruchten Fasern die Spannung in der ganzen Länge des Stabes constant gleich kt ist.

$$kt = \frac{a}{J_p} M = \frac{M}{W_p} = \text{constant}.$$

Bei dem ersten Fall: Der Stab ist an einem Ende festgehalten, am andern Ende mit PR auf Drehung beansprucht, und ebenso bei dem zweiten Fall ist die Bedingung schon erfüllt, denn PR ist in allen Querschnitten constant und auch W_p, denn der Stab ist prismatisch.

Für den dritten Fall: Der Stab ist durch ein in seiner ganzen Länge gleichmässig vertheiltes Moment PR auf Drehung beansprucht, ist für einen beliebigen Querschnitt $M_x = PR \frac{x}{l}$.

Bedingung ist aber $kt = \frac{M}{W_p}$, mithin ist

$$\frac{PRx}{l\,W_p} = kt \quad \ldots \ldots \quad (151)$$

woraus die Querschnittsdimensionen zu berechnen sind.

Für Kreisquerschnitt z. B. ist $W_p = \frac{y^3 \pi}{16}$, wenn y der Durchmesser in der Entfernung x ist.

Es folgt also

$$\frac{PRx}{l} = \frac{y^3 \pi}{16} kt.$$

Für $x = l$ ist

$$PR = \frac{d^3 \pi}{16} kt.$$

Die Gleichsetzung der beiden Werthe für kt ergiebt

$$\frac{x}{l} = \frac{y^3}{d^3} \text{ oder } \frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots \ldots \quad (152)$$

Die Begrenzung ist eine cubische Parabel, die durch abgestumpften Kegel zu ersetzen ist.

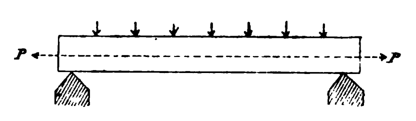
VI. Abschnitt.

Zusammengesetzte Festigkeit.

Ist ein Constructionstheil so beansprucht, dass nicht nur einer der bisher betrachteten einfachen Fälle, sondern mehrere derselben gleichzeitig auftreten, so entstehen durch die Combination von Zug oder Druck und Biegung, von Biegung und Drehung, von Zug oder Druck und Drehung, von Biegung und Schub, von Schub und Drehung, in dem Körper Spannungen, die nur aus Normalspannungen oder aus Normal- und Tangentialspannungen oder nur aus Tangentialspannungen zusammengesetzt sind.

Biegung mit Zug oder Druck.

Durch die Zug- oder Druckkraft werden alle Querschnitte gleichmässig beansprucht, es fällt demnach der gefährliche Querschnitt für die combinirte Beanspruchung mit dem gefährlichen Querschnitt für die Biegung zusammen.



Vorauszusetzen ist, dass die Zug- oder Druckkraft P mit ihrer Richtung in die Stabaxe fällt und dass, wenn P Druck ist, die Länge des Stabes verhältnissmässig klein ist in Bezug auf die Querschnittsdimensionen (siehe Knickungsfestigkeit).

Ist M das Maximalbiegungsmoment,

F die Grösse des Querschnittes,

k' die im gefährlichen Querschnitt durch die Biegung bewirkte grösste Zugspannung,

k'' die im gefährlichen Querschnitt durch die Biegung bewirkte grösste Druckspannung,

k''' die durch die Zugkraft oder durch die Druckkraft bewirkte Spannung und sind

W_1 und W_2 die Widerstandsmomente für Querschnitte, die nicht symmetrisch zur neutralen Axe sind — bei symmetrischem Querschnitt ist $W_1 = W_2 = W$ — so ist

$$k' = \frac{M}{W_1} \text{ (Zugspannung)}, \quad k'' = -\frac{M}{W_2} \text{ (Druckspannung).}$$

Die durch die Zug- oder Druckkraft bewirkte Spannung

$$k''' = + \frac{P}{F} \text{ oder } - \frac{P}{F}.$$

Die Spannungen sind alle Normalspannungen und können einfach addirt werden.

Für Biegung und Zug ist demnach die Gesammtspannung in der äussersten durch die Biegung gezogenen Faserschicht

$$k_1 = k' + k''' = \frac{M}{W_1} + \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

in der äussersten durch die Biegung gedrückten Faserschicht

$$k_2 = k'' + k''' = - \frac{M}{W_2} + \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

Ist der Querschnitt symmetrisch zur neutralen Axe, so ist

$$W_1 = W_2 = W.$$

Für Biegung und Druck ist

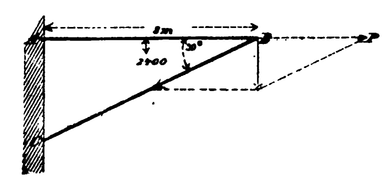
$$k_1 = \frac{M}{W_1} - \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

$$k_2 = - \frac{M}{W_2} - \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

Der Querschnitt ist so zu dimensioniren, dass weder der Werth k_1 noch der von k_2 die zulässige Grösse der Beanspruchung übersteigt.

Man verfährt dabei, wenn es sich um anderen als rechteckigen Querschnitt handelt, am einfachsten so, dass man passend scheinende Querschnittsdimensionen annimmt und diese vergrössert oder verkleinert, bis die maximalen Spannungen k_1 und k_2 die gewünschte Grösse erhalten.

Beispiel 1.



Ein 3 m langer Träger AB ist in der Mitte mit 2400 kg belastet und an einem Ende durch die Strebe BC unterstützt. Für den Träger, der aus zwei nebeneinanderliegenden Stangen besteht, soll der Querschnitt bestimmt werden.

Auf die beiden Stützpunkte A und B des Trägers kommt ein Druck (Reaction) von je 1200 kg.

Der Druck in B zerlegt sich in zwei Componenten, deren eine $P = \frac{1200}{tg 30^0} = \frac{1200}{0{,}577} = 2080$ kg in die Axe des Trägers als Zugkraft fällt.

Das Maximalbiegungsmoment ist

$$M = 1200 \,.\, 150 = 180000 \text{ cmkg.}$$

Es ist also in der stärkst gezogenen Faserschicht die Spannung

$$k_1 = \frac{M}{W} + \frac{P}{F} = \frac{180000}{2\frac{bh^2}{6}} + \frac{2080}{2\,bh},$$

wenn angenommen wird, dass der Träger aus zwei Flacheisenschienen besteht, deren Höhe h und deren Dicke b ist.

Nimmt man nun für h 15 cm an, und für die zulässige Beanspruchung 800 kg pro qcm, so folgt aus obiger Gleichung

$$b = \frac{1}{800}\left(\frac{180000 \,.\, 3}{225} + \frac{2080}{30}\right) = 3{,}08 \text{ cm.}$$

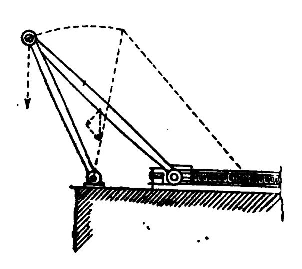
Diese Dicke ist aber für Flacheisen zu gross, es sei deshalb ein Profil von ⊐ Form und zwar nach einer Profiltabelle ein solches mit 160 mm Höhe, 65 mm Flanschenbreite, 12 mm Flanschendicke und 3 mm Stegdicke gewählt, mit dem Widerstandsmoment $W = 128$ und mit der Fläche $F = 26{,}48$ qcm.

Es ist dann

$$k_1 = \frac{180000}{2 \,.\, 128} + \frac{2080}{2 \,.\, 26{,}48} = 703{,}1 + 39{,}3 = 742{,}4 \text{ kg.}$$

Das gewählte Profil kann beibehalten werden, da k_1 einen zulässigen Werth erhält.

Beispiel 2.



In der von Blech genieteten, 40 m langen Hinterstütze eines Scheerenkrahnes von 60 000 kg Tragfähigkeit entsteht in der äussersten schrägen Stellung durch die Belastung und das Eigengewicht der 3 Stützen eine Zugkraft von 90 000 kg. Das zu 10 000 kg geschätzte Eigengewicht der Stütze zerlegt sich in zwei Componenten, von denen die eine in die Stütze, die andere senkrecht zu dieser fällt. Die Letztere ist 7000 kg und da wegen der nach den Enden zu verjüngten Form der Stütze das Eigengewicht nicht ganz gleichmässig vertheilt, sondern mehr nach der Mitte zu concentrirt ist, so kann man für das Moment anstatt $Q\frac{l}{8}$, den grösseren Werth $Q\frac{l}{6}$ annehmen.

Der äussere Durchmesser d_a in der Mitte der Länge l der Stütze sei nun nach der empirischen Regel: $d_a = 0{,}03\,l$ bis $0{,}04\,l$ gleich

120 cm und die Blechdicke gleich 1 cm angenommen, dann ist der innere Durchmesser $d_i = 118$ cm. Es ist nun die Zugspannung im meist belasteten Querschnitt

$$k = \frac{M}{W} + \frac{P}{F}.$$

Die Querschnittsfläche ist

$$F = (d_a^2 - d_i^2)\frac{\pi}{4} = (120^2 - 118^2) . 0{,}785 \backsim 374 \text{ qcm.}$$

Das Widerstandsmoment ist nach Gl. 47

$$W = \frac{\pi}{32}\left[\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}\right] = \frac{(120^4 - 118^4)}{120} \cdot \frac{\pi}{32} = 11030.$$

Das Biegungsmoment ist

$$M = 7000 . \frac{4000}{6} = 4666666.$$

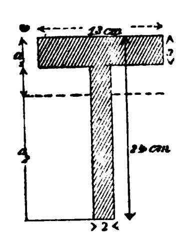
Wegen der Verschwächung durch die Nietung, die ca. 20 Procent beträgt, ist füz F nur $\frac{4}{5}$ F zu setzen. Es folgt also

$$k = \frac{4666666}{11030} + \frac{90000 . 5}{374 . 4} = 423 + 301 = 724 \text{ kg.}$$

Um diese Spannung zu vermindern, so dass sie den höchst zulässigen Werth von 700 kg nicht übersteigt, soll der äussere Durchmesser gleich 130 cm angenommen werden.

Beispiel 3.

Ein an einem Ende befestigter, am anderen Ende freier Träger von Gusseisen ist 1 m lang und gleichmässig mit 3500 kg belastet. Auf das freie Ende wirkt ein Druck von 4000 kg in der Richtung der Stabaxe. Der Querschnitt soll T-Form haben.



Für ein Profil von in nebenstehender Figur angegebenen Dimensionen ist der Abstand der neutralen Axe von der Oberkante des Flansches nach Gl. 23

$$a_1 = \frac{13 . 3 . 1{,}5 + 21 . 2 . 13{,}5}{13 . 3 + 21 . 2} = \frac{625{,}5}{81} = 7{,}72 \text{ cm}$$

Der Abstand $a_2 = 24 - 7{,}72 = 16{,}28$ cm.

Das Trägheitsmoment ist

$$J = \frac{1}{3}\left(13 . 7{,}72^3 - 11 . 4{,}72^3 + 2 . 16{,}28^3\right) \backsim 4465.$$

Die Widerstandsmomente sind

$$W_1 = \frac{J}{a_1} = \frac{4465}{7{,}72} \backsim 578.$$

$$W_2 = \frac{J}{a_2} = \frac{4465}{16{,}28} \backsim 275.$$

Das Maximalmoment ist

$$M = \frac{Q\,l}{2} = 3500 \,.\, 50 = 175000.$$

Die Querschnittsfläche

$$F = 13 \,.\, 3 + 21 \,.\, 2 = 81 \text{ qcm}.$$

Wenn der Flansch oben an der durch die Biegung gezogenen Seite liegt, ist die grösste Zugspannung nach Gl. 155

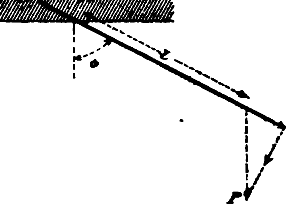
$$k_1 = \frac{175000}{578} - \frac{4000}{81} = 252{,}6 \text{ kg}$$

und die grösste Druckspannung unten, nach Gl. 156

$$k_2 = -\frac{175000}{275} - \frac{4000}{81} = -\,685{,}7 \text{ kg}.$$

Die Spannungen sind mässige und nach ihrem Verhältniss, ohngefähr 1 : 2,7, ist der Querschnitt angenähert ein Querschnitt gleicher Festigkeit.

Der Stab ist schräg befestigt und am freien Ende mit *P* belastet.



P zerlegt sich in 2 Componenten, von denen die eine, *P cos α*, als Zugkraft in die Stabaxe fällt. Die andere, *P sin α*, beansprucht den Stab auf Biegung mit dem Moment *P sin α l*.

Die maximale Spannung auf der durch die Biegung gezogenen Seite ist

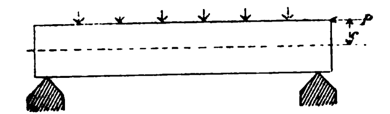
$$k_1 = P\left(\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\sin\alpha\, l}{W_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (157)$$

auf der anderen Seite

$$k_2 = P\left(\frac{\cos\alpha}{F} - \frac{\sin\alpha\, l}{W_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

Bei symmetrischem Querschnitt ist $W_1 = W_2 = W$.

Zug oder Druck und Biegung mit Zug- oder Druckkraft, die parallel zur Stabaxe gerichtet ist, aber nicht in dieselbe fällt.



Durch die Zug- oder Druckkraft P entsteht ein zweites Moment Pc, das, jenachdem P ober- oder unterhalb der neutralen Axe angreift, das Moment M der zur Stabaxe senkrechten Kräfte vergrössert oder verkleinert.

Für P als Druckkraft und oberhalb der neutralen Axe angreifend, ist für die durch die Biegung gezogene Seite die stärkste Spannung

$$k_1 = \frac{M + Pc}{W_1} - \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (159)$$

für die andere Seite

$$k_2 = -\frac{M + Pc}{W_2} - \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (160)$$

Wenn P unterhalb der neutralen Axe angreift, ist

$$k_1 = \frac{M - Pc}{W_1} - \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (161)$$

$$k_2 = -\frac{M - Pc}{W_2} - \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (162)$$

Ist P Zugkraft, so erhalten alle Glieder mit P das entgegengesetzte Vorzeichen.

Aus den letzten Gleichungen ist ersichtlich, dass man durch entsprechende Verlegung des Angriffspunktes der Kraft P die Tragfähigkeit des Trägers erhöhen kann.

Beispiel.

Der Angriffspunkt der Druckkraft von 4000 kg an dem im letzten Beispiel berechneten gusseisernen Träger sei von der Axe des Trägers 6 cm nach oben in den Flansch verlegt.

Es ist dann die grösste Zugspannung

$$k_1 = \frac{175000 - 4000 \cdot 6}{578} - \frac{4000}{81} = 212 \text{ kg}$$

und die grösste Druckspannung

$$k_2 = -\frac{175000 - 4000 \cdot 6}{275} - \frac{4000}{81} = -599 \text{ kg}.$$

Excentrischer Zug.

Eine ausserhalb der Stabaxe in der Entfernung r von dieser angreifende Zugkraft P erzeugt in dem Stabe neben dem Zug das Maxi-

malmoment Pr und es ist die maximale Spannung in der durch die Biegung gezogenen Seite

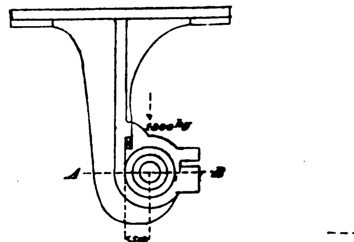
$$k_1 = \frac{P}{F} + \frac{Pr}{W_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (163)$$

in der durch die Biegung gedrückten Seite

$$k_2 = \frac{P}{F} - \frac{Pr}{W_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (164)$$

Beispiel.

Der mit 1800 kg belastete Zapfen einer Welle soll durch ein Hängelager getragen werden. Der Durchmesser des Zapfens ist 55 mm und für das rippenförmig gestaltete Lagergehäuse erhält man für den Querschnitt in der Mittelebene AB des Zapfens nach den üblichen, von dem Zapfendurchmesser abhängigen Verhältnissen die Flanschenbreite 65 mm, die Flanschendicke 18 mm, die Rippenhöhe 60 mm und die Rippendicke 18 mm.



Es ist zu untersuchen, ob der Querschnitt für die Belastung genügt.

Die Entfernung der neutralen Axe von der oberen Kante ist nach Gl. 23

$$a_1 = \frac{65 \,.\, 18 \,.\, 9 + 60 \,.\, 18 \,.\, 48}{65 \,.\, 18 + 60 \,.\, 18} = \frac{62370}{2250} = 27{,}8 \text{ mm}$$

dann ist

$$a_2 = 78 - 27{,}8 = 50{,}2 \text{ mm}$$

Das Trägheitsmoment ist nach Gl. 32

$$J = \frac{1}{3}\left(65 \,.\, 27{,}8^3 - 47 \,.\, 9{,}8^3 + 18 \,.\, 50{,}2^3\right) = 1209796.$$

Die Widerstandsmomente sind

$$W_1 = \frac{1209796}{27{,}8} = 43518, \quad W_2 = \frac{1209796}{50{,}2} = 24099.$$

Das Biegungsmoment ist

$$M = 1800\ (50 + 27{,}8) = 1800 \,.\, 77{,}8 = 140040.$$

Nach Gl. 163 und 164 ist nun

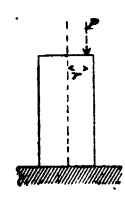
$$k_1 = \frac{1800}{65 . 18 + 60 . 18} + \frac{140040}{43518} = 0,8 + 3,2 = 4 \text{ kg}$$

$$k_2 = \frac{1800}{65 . 18 + 60 . 18} - \frac{140040}{24099} = 0,8 - 5,8 = - 5 \text{ kg.}$$

Die Zugspannung ist etwas zu gross, weshalb eine Verstärkung des Flansches auf 20 mm zu empfehlen ist.

Nach denselben Gleichungen, 163 und 164, sind Hängesäulen mit belasteten Consolen zu berechnen.

Excentrischer Druck.



Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Die Länge des belasteten Stabes ist verhältnissmässig klein im Vergleich mit den Querschnittsdimensionen, so dass die bei gesteigerter Belastung entstehende Durchbiegung verschwindend klein ist im Verhältniss zum Hebelarm der Kraft.

Die Maximalspannung an der durch die Biegung gezogenen Seite ist

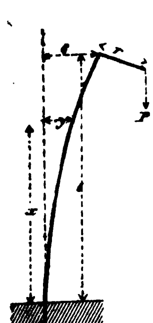
$$k_1 = - \frac{P}{F} + \frac{Pr}{W_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (165)$$

an der anderen Seite

$$k_2 = - \frac{P}{F} - \frac{Pr}{W_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (166)$$

Bei einem zur neutralen Axe symmetrischen Querschnitt ist

$$W_1 = W_2 = W.$$



2. Fall. Die Länge des belasteten Stabes ist verhältnissmässig gross, so dass die Durchbiegung bei gesteigerter Belastung den Hebelarm der Kraft P vergrössern würde.

Ist δ die Durchbiegung am freien Ende des Stabes, so ist am unteren Ende das Maximalmoment

$$M = P(r + \delta).$$

Das Moment wächst vom freien Ende bis zu dem befestigten mit der Abnahme der Durchbiegung y.

Für einen beliebigen Punkt in der Entfernung x mit der Durchbiegung y ist das Moment

$$M = P(r + \delta - y).$$

Nach Gl. 52 ist

$$\pm EJ \frac{d^2y}{dx^2} = P(r + \delta - y).$$

Setzt man nach Grashof, Festigkeitslehre

$$\frac{P}{EJ} = m^2 \text{ und } y - r - \delta = x,$$

so folgt

$$\pm \frac{d^2x}{dx^2} = - m^2 x,$$

denn da r und δ constant sind, so ist auch

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Differenzialgleichung ist

$$\pm x = A \sin(mx) + B \cos(mx)$$

oder

$$\pm (y - r - \delta) = A \sin(mx) + B \cos(mx).$$

Die Werthe der Constanten A und B erhält man mit den zusammengehörigen Werthen $x = o$ und $y = o$. Es folgt zunächst $B = - r - \delta$ und aus $\frac{dy}{dx}$ folgt dann, mit $x = o$,

$$A = o.$$

Mit Einsetzung des Werthes für B ergiebt sich mit Rücksicht auf die convexe Biegung

$$y = r + \delta - (r + \delta) \cos(mx).$$

Dem Werth l für x entspricht $y = \delta$, mithin ist

$$\frac{\delta - r - \delta}{r + \delta} = - \cos(ml)$$

oder

$$r = (r + \delta) \cos(ml) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (167)$$

Durch Division der Gleichungen für y und r erhält man

$$\frac{y}{r} = \frac{1 - \cos(mx)}{\cos(ml)}.$$

Aus der Gleichung für r folgt auch

$$(r + \delta) = \frac{r}{\cos(ml)},$$

demnach ist das Maximalmoment

$$M = P(r + \delta) = \frac{Pr}{\cos(ml)}.$$

Sind a und a_1 die Abstände der äussersten Faserschichten von der neutralen Axe, so ist mit Einsetzung von $\frac{P}{EJ}$ für m, analog den Gleichungen 165 und 166, die maximale Spannung an der durch die Biegung gezogenen Seite mit $W_1 = \frac{J}{a_1}$ und $W_2 = \frac{J}{a_2}$

$$k_1 = -\frac{P}{F} + \frac{Pra_1}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

$$= P\left(-\frac{1}{F} + \frac{ra_1}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}\right) \quad \ldots\ldots \quad (168)$$

Die maximale Spannung an der durch die Biegung gedrückten Seite ist

$$k_2 = -\frac{P}{F} - \frac{Pra_2}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

$$= -P\left(\frac{1}{F} + \frac{ra_2}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}\right) \quad \ldots\ldots \quad (169)$$

Zur Berechnung der Tragfähigkeit bei gegebenem Querschnitt ist

$$P = \frac{k_1}{-\frac{1}{F} + \frac{ra_1}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}} \quad \text{oder}$$

$$P = \frac{k_2}{-\frac{1}{F} - \frac{ra_2}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}} \quad \ldots\ldots \quad (170)$$

Der kleinere Absolutwerth von beiden ist der gültige.

Sind die zulässigen Werthe für k_1 und k_2 gleich gross, wie bei Schmiedeeisen, und ist $a_1 = a_2$, so ist die letzte Gleichung für P maassgebend.

Bei der Berechnung von P muss man annäherungsweise verfahren, dadurch, dass man zunächst unter dem Wurzelzeichen $P = 1$ setzt. Der so erhaltene Werth von P ist dann unter dem Wurzelzeichen einzusetzen und die Tragfähigkeit nochmals zu berechnen. Dies kann man so oft wiederholen, bis die Differenzen der Resultate

verschwindend klein werden. Die Genauigkeit von P ist aber gewöhnlich schon nach zweimaliger Rechnung genügend gross.

Beispiel.

An einer gusseisernen Säule mit ringförmigem Querschnitt von 20 cm äusserem und 14 cm innerem Durchmesser sitzt in der Höhe von 3 m am freien Ende ein Consol, auf dem ein belasteter Träger ruht. Die Entfernung der Consolmitte von der Säulenaxe ist 200 mm. Es soll die Tragfähigkeit der Säule berechnet werden.

Das Trägheitsmoment des Querschnittes ist

$$J = \left(20^4 - 14^4\right)\frac{\pi}{64} = \left(160000 - 38416\right)\frac{\pi}{64} = 5963,$$

die Querschnittsfläche:

$$F = \left(20^2 - 14^2\right)\frac{\pi}{4} = \left(400 - 196\right) . \, 0{,}7854 = 160{,}2 \text{ qcm.}$$

Mit der Annahme von 250 kg als zulässige Grösse für die Zugspannung k_1 ist nach Gl. 170

$$P = \frac{250}{-\frac{1}{160{,}2} + \frac{20 \, . \, 10}{5963 \, . \, cos \, 300 \sqrt{\frac{1}{1000000 \, . \, 5963}}}}$$

$$= \frac{250}{-0{,}00624 + \frac{200}{5963 \, . \, cos \, 0{,}003885}}.$$

0,003 885 ist die Bogenlänge des Winkels bezogen auf den Radius gleich 1.

Ist α der zugehörige Winkel, so ist

$$\alpha^0 : 180^0 = 0{,}003885 : \pi,$$

woraus

$$\alpha^0 = \frac{180}{\pi} . \, 0{,}003885 = 0{,}2226.$$

Für diesen kleinen Winkel ist der Werth des cosinus von 1 wenig verschieden, mithin ist angenähert

$$P = \frac{250}{-0{,}00624 + \frac{200}{5963}} = \frac{250}{-0{,}00624 + 0{,}0335}$$

$$= \frac{250}{0{,}02727} \backsim 9167 \text{ kg.}$$

Dieser erste Näherungswerth ist nun unter dem Wurzelzeichen einzusetzen und es folgt

$$P = \frac{250}{-0{,}00624 + \dfrac{200}{5963 \,.\, cos\, 300 \sqrt{\dfrac{9167}{1000000 \,.\, 5963}}}}$$

$$= \frac{250}{-0{,}00624 + \dfrac{200}{5963 \,.\, cos\, 0{,}3561}}.$$

Nun verhält sich wieder $\alpha^0 : 180^0 = 0{,}3561 : \pi$, woraus

$$\alpha = \frac{180 \,.\, 0{,}3561}{3{,}1416} \backsim 20{,}4^0.$$

Es ist also

$$P = \frac{250}{-0{,}0062 + \dfrac{200}{5963 \,.\, cos\, 20^0\, 24'}}$$

$$= \frac{250}{-0{,}0062 + \dfrac{200}{5963 \,.\, 0{,}9377}} = \frac{250}{-0{,}0062 + 0{,}0357}$$

$$= \frac{250}{0{,}02946} \backsim 8486 \text{ kg}.$$

Eine nochmalige Wiederholung der Berechnung würde sehr geringe Differenz mit dem letzten Werth für P ergeben, weshalb dieser beibehalten werden soll.

Für die zulässige Grösse der Druckspannung kann 500 kg pro qcm angenommen werden. Es ist nun noch zu untersuchen, ob die Gleichung

$$P = \frac{k_2}{-\dfrac{1}{F} - \dfrac{r\, a_2}{J\, cos\left(l \sqrt{\dfrac{P}{EJ}}\right)}}$$

eine kleinere Tragfähigkeit ergiebt.

Man erhält als ersten Näherungswerth: $P \backsim 13000$ kg, also einen grösseren, nicht weiter zu berücksichtigenden Werth.

Biegung und Drehung.

Zur Unterscheidung des Biegungsmomentes und des Drehungsmomentes soll ersteres mit M_b, letzteres mit M_d bezeichnet werden.

Die durch die Biegung hervorgerufene grösste Normalspannung ist, nach der Gl. $M = Wk$ und für k allgemein σ gesetzt,

$$\sigma = \frac{M_b}{W} = \frac{M_b a}{J}.$$

Die durch die Drehung hervorgerufene grösste Schubspannung ist

$$\tau = \frac{M_d}{W_p} = \frac{M_d a}{J_p}$$

nach Gl. 143.

Die beiden Spannungen vereinigen sich zu einer gleichwerthigen Normalspannung nach Gl. 141:

$$\Sigma = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Für Σ ist der zulässige Werth k zu setzen.

Setzt man in dieser Gleichung σ, also die Biegung gleich Null, so folgt die Schubspannung $\tau = \frac{4}{5} k$. Nach den in der Tabelle S. 5 angegebenen, durch Versuche und Erfahrung gewonnenen Werthen für die zulässige Beanspruchung bei der Drehung, ist aber der zulässige Werth kt von τ kleiner als $\frac{4}{5} k$.

Es sei der Coefficient, der die Verschiedenheit von $\tau = \frac{4}{5} k$ für Schub und von τ oder kt für Drehung angiebt, mit α bezeichnet, dann ist

$$\alpha\tau = \frac{4}{5} k \text{ oder } \alpha = \frac{k}{\frac{5}{4}\tau}.$$

Es ist also, um die Gleichung 141 für Biegung und Drehung verwendbar zu machen, in derselben τ mit dem Werth

$$\alpha = \frac{\text{zulässige Beanspruchung für Biegung}}{\frac{5}{4} \text{ zulässige Beanspruchung für Drehung}}$$

zu multipliciren.

Mit Einsetzung der Werthe für σ und τ und $\alpha\tau$ für τ erhält man

$$k = \frac{3}{8}\frac{M_b a}{J} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{M_b a}{J}\right)^2 + 4\left(\alpha\frac{M_d a}{J_p}\right)^2}$$

oder

$$k = \frac{a}{J}\left[\frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b{}^2 + \left(\alpha\frac{2 M_d J}{J_p}\right)^2}\right].$$

Da bei den auf Drehung beanspruchten Constructionstheilen immer ein zur Axe symmetrischer Querschnitt anzunehmen ist, so ist

$$J_p = 2J$$

Es folgt also

$$k\frac{J}{a} = \frac{3}{8}M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + (\alpha M_d)^2}.$$

Nach Gl. 21 ist aber $k\frac{J}{a} = M$, d. h. die linke Seite der Gleichung entspricht einem ideellen Biegungsmoment, welches die gleiche Wirkung hat, als die beiden Momente M_b und M_d zusammen. Bezeichnet man dieses ideelle combinirte Moment mit M_c, so ist

$$M_c = \frac{3}{8}M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + (\alpha M_d)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (171)$$

Die Gleichung lässt sich vereinfachen, wenn man den nach Poncelet*) benannten Satz anwendet:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \backsim 0{,}96x + 0{,}4\,y \text{ wenn } x > y$$

und

$$\sqrt{x^2 + y^2} \backsim 0{,}4x + 0{,}96y \text{ wenn } x < y.$$

Hiernach ist

$$M_c = \frac{3}{8}M_b + \frac{5}{8}\left(0{,}96\,M_b + 0{,}4\,\alpha M_d\right)$$

oder

$$M_c = 0{,}975\,M_b + 0{,}25\,\alpha M_d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (172)$$

wenn $M_b > \alpha M_d$

und

$$M_c = \frac{3}{8}M_b + \frac{5}{8}\left(0{,}4\,M_b + 0{,}96\,\alpha M_d\right)$$

$$M_c = 0{,}625\,M_b + 0{,}6\,\alpha M_d, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (173)$$

wenn $M_b < \alpha M_d$.

Ist das Biegungsmoment M_b gleich dem Drehungsmoment M_d, so ist das resultirende Moment

$$M_c = \frac{3}{8}M_b + \frac{5}{8}M_d\sqrt{1 + \alpha^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (174)$$

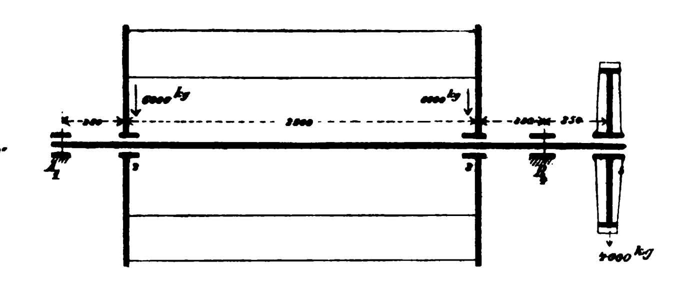
Anwendung finden die entwickelten Formeln bei der Berechnung von Wellen, die auf Drehung und durch Räder oder Scheiben, sowie durch das Eigengewicht auf Biegung beansprucht sind.

---

*) Poncelet Theorem, siehe Weissbach, Mechanik, I. Theil, Seite 345.

Beispiel.

Die Welle eines Wasserrades soll bei zehn Umdrehungen pro Minute 40 Pferdekräfte übertragen. Die Belastung der Punkte 2 und 3 durch das Gewicht des Rades und das in demselben befindliche Wasser ist 6000 kg. Die Belastung des Punktes 5 durch das Gewicht des Zahnrades und durch den Zahndruck ist 4000 kg. In diese Belastungen sei das Gewicht der Welle angenähert mit eingerechnet. Material: Gusseisen.



Die Leistung in Pferdekräften N ist ausgedrückt durch

$$N = \frac{2\,R\,\pi\,n\,P}{60\,.\,75\,.\,1000},$$

worin R der Radius des Wasserrades in Millimeter, P die Kraft am Umfange des letzteren, $n = 10$ die Umdrehungszahl bedeutet. Aus der Gleichung folgt das Drehungsmoment

$$PR = 716\,200\,\frac{N}{n} = 716\,200\,\frac{40}{10} = 2\,864\,800.$$

Zur Bestimmung der Reaction A an der Stelle 1 ist

$$A\;320 - 6000\;(285 + 35) + 4000\,.\,35 = o,$$

woraus

$$A = \frac{6000\,.\,320 - 4000\,.\,35}{320} = 5562{,}5\ \text{kg},$$

$$\text{Reaction } B = 12\,000 + 4000 - 5562 = 10\,437{,}5\ \text{kg}.$$

Der Stirnzapfen an der Stelle 1 ist auf Biegung zu berechnen. Ist d_1 der Durchmesser, l_1 die Länge des Zapfens, so ist, da der Druck 5562,5 kg gleichmässig vertheilt anzunehmen ist, das Moment an dem Zapfen $M = 5562{,}5\,\frac{l_1}{2}$ und nach der Gl. $M = Wk$ ist

$$5562{,}5\,\frac{l_1}{2} = \frac{d_1^{\,3}\pi}{32}\,k \text{ oder } 5562{,}5\,\frac{l_1}{d_1} = d_1^{\,2}\,\frac{\pi\,k}{16}.$$

Mit Rücksicht auf die bei der Drehung beständig wechselnde Beanspruchung zwischen positivem und negativem Spannungsmaximum kann, gutes Material vorausgesetzt, $k = 2$ kg pro qmm und das Verhältniss $\frac{l_1}{d_1}$ kann gleich 1,3 angenommen werden. Es folgt

$$d_1 = \sqrt{\frac{5562,5 \,.\, 1,3 \,.\, 16}{\pi \,.\, 2}} = 1,81 \sqrt{5562,5} \sim 135 \text{ mm}$$

und

$$l_1 = 1,3 \,.\, 135 = 175 \text{ mm}.$$

An der Stelle 2 ist das biegende Moment

$$M_b = 5562,5 \,.\, 350 = 1\,946\,875.$$

Vom Drehungsmoment kommt auf die Stelle 2 die Hälfte, es ist also $M_d = 1\,432\,400$.

Die Drehungsbeanspruchung kann, abgesehen von kleinen Schwankungen, bei Wasserrädern als angenähert constant oder ruhend angesehen und demnach für kt der in der Tabelle, Seite 5, angegebene Werth 1,5 kg pro qmm angenommen werden.

Die zulässige Grösse der Normalspannung, ebenfalls für ruhende Belastung, ist nach der Tabelle 3 kg pro qmm, also ist der Coefficient

$$\alpha = \frac{3}{\frac{5}{4} \,.\, 1,5} = 1,6$$

und nach Gl. 172, da $M_b > M_d$ ist

$$M_c = 0,975 \,.\, 1946875 + 0,25 \,.\, 1,6 \,.\, 1432400 = 2471163.$$

Nach der Gl. $M = Wk$ ist nun

$$M_c = \frac{D_2{}^3 \pi}{32} k \text{ oder } D_2 = \sqrt[3]{\frac{M\,32}{k}} \sim \sqrt[3]{\frac{10\,M_c}{k}}.$$

Mit $k = 2$ folgt der Durchmesser

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{10 \,.\, 2471163}{2}} = \sqrt[3]{12355815} \sim 232 \text{ mm}.$$

An der Stelle 3 ist das Biegungsmoment

$$M_b = 10437,5 \,.\, 350 - 4000 \,.\, 700 = 853125$$

und das Drehungsmoment

$$M_d = 2864800.$$

Da $M_b < M_d$, so ist nach Gl. 173

$$M_c = 0,625 \,.\, 853125 + 0,6 \,.\, 1,6\; 2864800 = 3283411,$$

der Durchmesser

$$D_3 = \sqrt[3]{\frac{10 \,.\, 3283411}{2}} = \sqrt[3]{16417055} \sim 254.$$

Von 2 bis 3 wird das Biegungsmoment allmälig kleiner, das Drehungsmoment bleibt constant, der Durchmesser könnte also von 2 bis 3 abnehmen und bei 3 müsste er 254 mm sein. Der bequemeren Herstellung wegen wird man zwischen den beiden Radnaben den Durchmesser constant gleich 232 machen und da, wo die Naben sitzen, der Bearbeitung und der Keilnuthen wegen, ohngefähr 260 mm.

An der Stelle 4 ist das Biegungsmoment

$$M_b = 4000 \,.\, 350 = 1\,400\,000,$$

das Drehungsmoment

$$M_d = 2\,864\,800$$

und da $M_b < M_d$, so ist

$$M_c = 0{,}625 \,.\, 1\,400\,000 + 0{,}6 \,.\, 1{,}6 \,.\, 2\,864\,800 = 3\,625\,208$$

und der Halszapfendurchmesser

$$d_4 = \sqrt[3]{\frac{10\,M_c}{k}} = \sqrt[3]{\frac{10 \,.\, 3\,625\,208}{2}} = \sqrt[3]{18\,126\,040} \backsim 262 \text{ mm}.$$

An der Stelle 5 ist, wenn die Länge der Nabe des Zahnrades 260 mm ist, das Biegungsmoment

$$M_b = 4000 \,.\, 130 = 520\,000,$$

das Drehungsmoment

$$M_d = 2\,864\,800$$

und

$$M_c = 0{,}625 \,.\, 520\,000 + 0{,}6 \,.\, 1{,}6 \,.\, 2\,864\,800 = 3\,275\,208,$$

$$D_5 = \sqrt[3]{\frac{10 \,.\, 3\,275\,208}{2}} = \sqrt[3]{16\,376\,040} \backsim 252.$$

Die Welle soll aber nicht voll, sondern h o h l mit k r e i s r i n g f ö r m i g e m Q u e r s c h n i t t gegossen werden. Die Bedingung für die Umwandlung der vollen Welle in die hohle ist die, dass an jeder beliebigen Stelle die Tragfähigkeit für beide gleich gross ist. Aus der Gleichung für die Tragfähigkeit

$$M_c = k\,\frac{J}{a} = k\,W \text{ folgt } W = \frac{M_c}{k}.$$

Ist nun das Widerstandsmoment für den vollen Querschnitt mit $W_\bullet$, das für den hohlen mit $W_\circ$ bezeichnet, so folgt die Bedingung $W_\bullet = W_\circ$, oder wenn D der Durchmesser des vollen, D_a der äussere und D_i der innere Durchmesser des ringförmigen Querschnittes ist

$$D^3\,\frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{32}\,\frac{D_a{}^4 - D_i{}^4}{D_a} = \frac{\pi}{32}\,\frac{D_a{}^4}{D_a}\left(1 - \frac{D_i{}^4}{D_a{}^4}\right)$$

und wenn man das Höhlungsverhältniss $\frac{D_i}{D_a}$ mit i bezeichnet, so folgt hieraus

$$D_a^3 = \frac{D^3}{1 - i^4}, \quad D_a = D \sqrt[3]{\frac{1}{1 - i^4}}.$$

Nach dieser Gleichung ist folgende Tabelle berechnet

Für $\frac{D_i}{D_a}$ =	0,3	0,35	0,4	0,45,	0,5	0,55	0,6
ist $\frac{D_a}{D}$ =	1,003	1,005	1,008	1,014	1,022	1,0344	1,048

Für $\frac{D_i}{D_a}$ =	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
ist $\frac{D_a}{D}$ =	1,067	1,096	1,135	1,192	1,26	1,43

Aus der Tabelle geht zunächst hervor, dass eine Höhlung von 0,3 bis 0,4 des äusseren Durchmessers die Festigkeit fast nicht vermindert.

Für die Stelle 1 sei nun das Höhlungsverhältniss $\frac{D_i}{D_a} = 0,55$ angenommen, dann ist nach der Tabelle der äussere Durchmesser

$$D_a = 1,034 \,.\, D = 1,034 \,.\, 135 = 140 \text{ mm},$$

der innere Durchmesser

$$D_i = 0,55 \; D_a = 0,55 \,.\, 140 = 77 \text{ mm}.$$

Die Wandstärke

$$\delta = \left(140 - 77\right) \frac{1}{2} = 31,5 \text{ mm}.$$

An den Stellen 2 und 3 mit $D = 260$ sei das Höhlungsverhältniss 0,8 angenommen, dann ist

$$D_a = 1,192 \,.\, 260 = 310 \text{ mm}, \quad D_i = 0,8 \,.\, 310 = 248 \text{ mm}$$

und die Wandstärke

$$\delta = \left(310 - 248\right) \frac{1}{2} = 31 \text{ mm}.$$

An der Stelle 4 mit $D = 262$ ist D_i ebenfalls gleich 248 mm zu machen.

Zwischen 2 und 3 mit $D = 232$ und dem Höhlungsverhältniss 0,75 ist

$$D_a = 1,135 \,.\, 232 \backsim 263, \quad D_i = 0,75 \,.\, 263 \backsim 198 \text{ mm},$$

die Wandstärke

$$\delta = 64 \,.\, \frac{1}{2} = 32 \text{ mm}.$$

An der Stelle 5 mit $D = 252$ und dem Höhlungsverhältniss 0,75 ist $D_a = 286$ mm, $D_i = 214$ mm.

Zug oder Druck und Drehung.

Ist P die axial im Stab wirkende Zug- oder Druckkraft, M_d das verdrehende Moment, so ist die Normalspannung $\sigma = \frac{P}{F}$ und die Tangentialspannung $\tau = \frac{M_d}{W_p}$.

Bei der Anwendung der Gleichung 141 ist auch in diesem Fall τ mit einem Coefficienten α zu multipliciren, dessen Grösse

$$\alpha = \frac{k}{\frac{5}{4}\tau} = \frac{\text{zulässige Beanspruchung für Zug oder Druck}}{\frac{5}{4}\ \text{zulässige Beanspruchung für Drehung}}$$

ist.

Nach Gl. 141 ist

$$k = \frac{3}{8}\frac{P}{F} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P}{F}\right)^2 + 4\left(\alpha\frac{M_d}{W_p}\right)^2}$$

oder

$$k = \frac{P}{F}\left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\alpha\frac{2\,M_d\,F}{W_p\,P}\right)^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

Für kreisförmigen Querschnitt, der bei Drehungsbeanspruchung gewöhnlich in Frage kommt, ist

$$F = \frac{d^2\pi}{4},\ W_p = \frac{d^3\pi}{16}.$$

Mit Einsetzung dieser Werthe folgt aus Gl. 175

$$k = \frac{4\,P}{d^2\pi}\left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\alpha\frac{8\,M_d}{d\,P}\right)^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

und

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi k}\left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\alpha\frac{8\,M_d}{d\,P}\right)^2}\right.} \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

Bei der Anwendung der letzten Gleichung zur Berechnung des Durchmessers verfährt man am besten annäherungsweise so, dass man zunächst d unter der Wurzel = 1 oder gleich einem schätzungsweise anzunehmenden Werth setzt, der kleiner ist als der voraussichtlich resultirende. Den erhaltenen Werth von d setzt man dann unter der Wurzel ein und wiederholt die Rechnung. Eine zweite Wiederholung

ist nur dann nöthig, wenn die beiden ersten Resultate wesentlich differiren. In den meisten Fällen wird man aber den Durchmesser d schätzungsweise annehmen und dann nach Gl. 176 zur Controle die entstehende maximale Spannung berechnen, die den Werth k nicht überschreiten darf.

Beispiel.

Die zur Bewegung der Hinterstütze eines grossen Scheerenkrahnes dienende horizontal liegende Schraubenspindel (siehe Figur Seite 115) von 12 m freitragender Länge hat eine in ihre Axe fallende Zugkraftcomponente von 60 000 kg aufzunehmen. Die bei der Drehung der Spindel in der am Fusse der Hinterstütze sitzenden Mutter erzeugte Reibung multiplicirt mit dem mittleren Gewinderadius ist das Drehungsmoment. Ausser diesem ist die Spindel auf Zug und auf Biegung durch das Eigengewicht beansprucht. Es soll der Kerndurchmesser und der äussere Gewindedurchmesser berechnet werden.

Ist r der mittlere Gewinderadius, so ist nach den Gesetzen der schiefen Ebene, als welche das Gewinde anzusehen ist, das Drehungsmoment $M_d = P\, tg\, (\alpha + \varrho)\, r$, wenn P die axiale Zugkraft, α der Steigungs- und ϱ der Reibungswinkel ist.

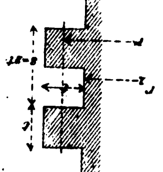
Für den Kerndurchmesser ist bei vorläufiger Berechnung auf Zug nach der Gl. $Fk = P$:

$$\frac{d_1^2 \pi}{4} k = 60000,$$

worin k mit Rücksicht auf die Drehungs- und Biegungsbeanspruchung nur 2 kg pro qmm angenommen sei. Es folgt

$$d_1 = \sqrt{\frac{60\,000 \,.\, 4}{\pi \,.\, 2}} \sim 197 \text{ mm}.$$

Dafür sei 200 gesetzt, so dass der Kernradius $r_1 = 100$ mm ist.



Nach der üblichen Regel ist dann die Tiefe des flachgängigen Gewindes

$$t = \frac{r_1}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ mm},$$

die Steigung

$$s = 2t = 50 \text{ mm}.$$

Der mittlere Radius ist demnach

$$r = r_1 + \frac{t}{2} = 112{,}5 \text{ mm}.$$

Der Steigungswinkel bestimmt sich aus

$$tg\, \alpha = \frac{s}{2 r \pi} = \frac{50}{2 \,.\, 112{,}5 \,.\, \pi} = 0{,}0708.$$

Dem entspricht ein Winkel $\alpha = 4^0\,5'$.

Dem gross anzunehmenden Reibungscoefficient $\mu = 0{,}12$ entspricht ein Reibungswinkel $\varrho = 6^0\,50'$.

Es ist also das Drehungsmoment an der Spindel

$$M_d = 6000\ tg\,(4^0\,5' + 6^0\,50')\,.\,112{,}5 = 60\,000\,.\,0{,}192\,.\,112{,}5$$
$$= 1\,296\,000.$$

Die Beanspruchungsweise durch den Zug sowohl, als durch die Drehung kann als ruhende betrachtet werden, doch seien der bei dem Krahnbetrieb auftretenden Stösse wegen die mässigen Werthe $k = 7$ kg und $kt = 3{,}5$ kg pro qmm angenommen. Dann ist der Coefficient

$$\alpha = \frac{7}{\frac{5}{4}\,.\,3{,}5} = 1{,}6.$$

Nach Gl. 176 ist nun die resultirende ideelle Spannung aus Zug und Drehung in der Kernspindel

$$k' = \frac{4\,.\,60\,000}{200^2\,\pi}\left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(1{,}6\,\frac{8\,.\,1\,296\,000}{200\,.\,60\,000}\right)^2}\right]$$
$$= \frac{6}{\pi}\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{2{,}909}\right) = \frac{6}{\pi}\,.\,1{,}439 = 2{,}75 \text{ kg.}$$

Zu dieser Normalspannung kommt noch die durch die Biegung hervorgerufene Normalspannung hinzu.

Das Gewicht der glatten Kernspindel ist bei 120 dcm Länge, mit dem specifischen Gewicht von 7,7 gleich

$$120\,.\,2^2\,\frac{\pi}{4}\,.\,7{,}7 = 2900 \text{ kg.}$$

Der äussere Gewindedurchmesser ist

$$d_2 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5\ dcm,$$

demnach ist das Gewicht vom Gewinde

$$\frac{1}{2}\left(2{,}5^2 - 2^2\right)\frac{\pi}{4}\,.\,120\,.\,7{,}7 = 826 \text{ kg.}$$

Das Gesammtgewicht ist

$$2900 + 826 = 3726 \text{ kg.}$$

Für den gleichmässig belasteten Träger ist das Moment $M = \frac{Ql}{8}$ und nach der Gleichung $M = Wk$ ist

$$3726\,.\,\frac{12\,000}{8} = \frac{200^3\pi}{32}\,k'',$$

woraus

$$k'' = \frac{3726 \cdot 12000 \cdot 32}{8 \cdot 8000000 \cdot \pi} = 7{,}1 \text{ kg.}$$

Die maximale Zugspannung ist mithin

$$k = 2{,}75 + 7{,}1 = 9{,}85 \text{ kg pro qmm.}$$

Diese Spannung ist zu gross; es sei deshalb der Kerndurchmesser $d_1 = 220$ mm angenommen. Die nochmalige Berechnung ergiebt für k ohngefähr 8 kg, welcher Werth beibehalten werden kann mit Rücksicht darauf, dass die freie Trägerlänge nur in der äussersten Stellung des Auslegers 12 m ist und dass auch nur in dieser vorübergehenden Stellung die maximale Zugkraft in Frage kommt.

Die Gewindetiefe ist dann

$$t = \frac{220}{8} \sim 27$$

und die Steigung $s = 54$ mm.

Nach den Gl. 176 und 177 sind die Schraubenspindeln von Schraubenpressen zu berechnen.

Ist P der axiale Druck in der Schraubenspindel, r der mittlere Gewinderadius, r_1 der Radius des auf der Pressplatte aufsitzenden Zapfens der Schraubenspindel, gleich dem Kernradius derselben, so ist die Reibung dieses Zapfens an der Pressplatte $P\mu$ und das Reibungsmoment $P\mu\ {}^2/_3\ r_1$. Das Moment des Widerstandes am Gewinde in der Richtung des Umfanges ist $P\ tg\ (\alpha + \varrho)\ r$. Das Drehungsmoment an der Schraubenspindel ist demnach

$$M_d = P\mu\ {}^2/_3\ r_1 + P\ tg\ (\alpha + \varrho)\ r.$$

Bei schätzungsweise angenommenem Kerndurchmesser und den entsprechenden Gewindedimensionen folgt dann, mit Einsetzung der Werthe von M_d aus obiger Gleichung berechnet, und von P und d in Gl. 176, die Spannung k.

Die Benutzung der Gl. 177 wird dann möglich, wenn man nach Annahme der passenden Steigungs- und Reibungswinkel aus obiger Gleichung berechnet:

$$\frac{2\,M_d}{P 2 r_1} = tg\ (\alpha + \varrho)\ \frac{r}{r_1} + {}^2/_3\ \mu$$

und diesen Werth unter der Wurzel in Gl. 177 für $\frac{2\,M_d}{dP}$ einsetzt.

Reibungscoefficient $\mu \sim 0{,}1$, $\frac{r}{r_1} \sim 1{,}13$.

Biegung und Schub.

Nach Gl. 141 ist die resultirende ideelle Normalspannung

$$k = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Ist M das Maximalbiegungsmoment, P die auf Schub wirkende Kraft, F die Querschnittsfläche, so folgt

$$k = \frac{3}{8}\frac{M}{W} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{P}{F}\right)^2}$$

oder

$$k = \frac{1}{8}\frac{M}{W}\left[3 + 5\sqrt{1 + \left(\frac{2PW}{FM}\right)^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (178)$$

Beispiel.

Der excentrisch sitzende Zapfen an einer Lochmaschine hat einen Durchmesser von 110 mm und eine Länge von 70 mm. Der nöthige Druck zum Durchstossen der Löcher ist 20000 kg. Es soll die Maximalspannung im Zapfen berechnet werden.

Das Moment ist $M = 20000 \,.\, 35$.

Das Widerstandsmoment $W = \frac{110^3\pi}{32}$ und die Fläche $F = \frac{110^2\pi}{4}$,

mithin ist

$$k = \frac{20000 \,.\, 35 \,.\, 32}{8 \,.\, 1331000 \,.\, \pi}\left[3 + 5\sqrt{1 + \frac{2 \,.\, 20000 \,.\, 110^3\pi \,.\, 4}{110^2 \,.\, \pi \,.\, 20000 \,.\, 35 \,.\, 32}}\right]$$

$$= 0{,}669\,[3 + 5\sqrt{1 + 0{,}617}] = 0{,}669\,(3 + 6{,}35) = 6{,}25 \text{ kg}.$$

Die Beanspruchung ist — vorzügliches Schmiedeeisen vorausgesetzt — eine mässige mit Rücksicht auf die zwischen Null und einem Maximum wechselnde Belastung.

Schub und Drehung.

Die durch die Schubkraft P bewirkte Spannung ist $\frac{P}{F}$ und die durch das Drehungsmoment bewirkte Spannung ist $\frac{M_d}{W_p}$.

Beide Tangentialspannungen dürfen zusammen den Werth kt für Schub nicht überschreiten, es ist also

$$kt = \frac{P}{F} + \alpha\frac{M_d}{W_p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (179)$$

Hierin ist

$$\alpha = \frac{kt \text{ für Schub}}{kt \text{ für Drehung}}.$$

VII. Abschnitt.

Knickungsfestigkeit.

Wenn ein Stab durch eine Druckkraft, deren Richtung mit der Axe zusammenfällt, beansprucht wird, so entsteht allgemein in den Querschnitten Druckspannung und eine Verkürzung des Stabes. Hat aber der Stab eine verhältnissmässig grosse Länge, so wird die kleinste Abweichung der Kraftrichtung aus der Axe, die kleinste zufällige Seitenkraft oder Erschütterung eine Durchbiegung bewirken. Mit der Durchbiegung entsteht ein Moment, welches das Bestreben hat, die Durchbiegung zu vergrössern, also selbst zu wachsen, so dass ein Zerknicken des Stabes eintreten kann, wenn die Kraft P grösser ist als die, bei der eine Durchbiegung überhaupt nicht bestehen kann.

Der Fall, dass der Stab an einem Ende fest eingeklemmt, am anderen Ende frei und mit dem Druck P in der Axenrichtung belastet ist, ist identisch mit dem auf Seite 120 betrachteten excentrisch gedrückten Stab, wenn bei diesem der Hebelarm der Kraft $r = o$ gesetzt wird.

Nach Gl. 167 ist $\cos(ml) = \frac{r}{r+\delta}$, worin $m = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ und δ die Durchbiegung am freien Ende ist.

$\cos(ml)$ erhält mit $r = o$ und $\delta = o$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$. Damit $\cos(ml) = o$ wird, muss δ einen Werth $> o$ haben. Wenn dies der Fall ist, wird also

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = o,$$

d. h. bei dem kleinsten Werth von $l\sqrt{\frac{P}{EJ}}$, der die Gleichung erfüllt, ist eben noch eine Durchbiegung und damit eine unzulässige Vergrösserung der Spannungen oder ein Zerknicken möglich.

In der Gleichung $\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = o$ bedeutet $l\sqrt{\frac{P}{EJ}}$ den Bogen des Winkels, dessen *cosinus* $= o$ ist. Dieser Bogen ist aber der von der Länge $\frac{\pi}{2}$ entsprechend dem Winkel 90°. Die übrigen Werthe $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ u. s. w., die ebenfalls die Gleichung erfüllen, lassen darauf schliessen, dass bei vergrösserter, besonders stossweise wirkender Kraft die elastische Linie des Stabes mehrere Wellen bilden und der Stab somit in mehreren Querschnitten gleichzeitig gefährtet ist. Für die Anwendung ist nur der kleinste Werth $\frac{\pi}{2}$ in Rechnung zu ziehen und es folgt also die Bedingung dafür, dass die Kraft eben noch genügt, eine Durchbiegung zu erzeugen:

$$l\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2}$$

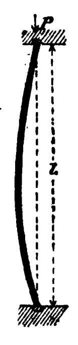
und daraus die Grösse der Kraft

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}.$$

Damit eine Durchbiegung nicht stattfinden kann, darf der Stab nur mit einem gewissen, dem $n$ten Theil von P belastet werden, so dass man erhält

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{n l^2} \backsim \frac{5}{2} \frac{EJ}{n l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

Die Wahl des Sicherheitscoefficienten n ist im allgemeinen beliebig und hängt von dem Auftreten zufälliger Seitenkräfte, von Stössen u. s. w., ab. Gewöhnlich setzt man
für Schmiedeeisen $n = 5$, für Gusseisen $n = 6$, für Holz $n = 10$.



Da die Durchbiegung nach der Seite geschehen würde, nach der die Querschnittsdimensionen am kleinsten sind, so ist für J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes einzuführen.

Die in den Stabquerschnitten entstehende Druckspannung ist $k = \frac{P}{F}$, da eine Biegung nicht vorhanden ist.

Ist der Stab **an beiden Enden gestützt**, so verhalten sich die beiden Stabhälften genau so wie der ganze Stab im ersten Falle, denn in der Mitte kann, weil die elastische Linie oder die Tangente an dieser daselbst die

Neigung Null hat, der Stab von der Länge $\frac{l}{2}$ als fest eingeklemmt angesehen werden.

In die Gleichung für P ist mithin $\frac{l}{2}$ anstatt l einzuführen und es folgt für die Tragfähigkeit

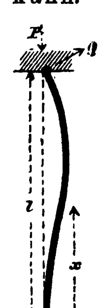
$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \backsim 10 \frac{EJ}{n\,l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (181)$$

Ein dritter Fall ist der, dass der Stab an beiden Enden fest eingeklemmt ist. Die Durchbiegung vorausgesetzt, müsste die elastische Linie zwei Wendepunkte haben und es lässt sich leicht nach der Bedingung $M = o$ für die Wendepunkte mit Hülfe der Gleichungen Seite 120 und 121 $M = P(r + \delta - y)$ und $y = r + \delta - (r + \delta) \cos(mx)$ worin $r = o$ ist, nachweisen, dass die beiden Wendepunkte und der Scheitelpunkt zwischen beiden die Stablänge in vier gleiche Theile theilen.

Jeder der Theile ist aber, wegen der Neigung der Tangente gleich Null an je einem Ende, als ein an einem Ende eingeklemmter, am anderen freier Stab anzusehen und es ist demnach

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{n\left(\frac{l}{4}\right)^2} \backsim 40 \frac{EJ}{n\,l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (182)$$

Der vierte mögliche Fall ist der, dass der Stab an einem Ende fest eingeklemmt, am anderen Ende frei, aber so geführt oder festgehalten ist, dass das Ende aus der ursprünglichen Lage in der Stabaxe sich nicht entfernen kann.



Bei oberflächlicher Betrachtung erkennt man, dass der Stab aus drei ohngefähr gleichlangen Theilen besteht, die sich so verhalten, wie der an einem Ende eingeklemmte, am anderen Ende freie Stab. Es ist demnach

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{n\left(\frac{l}{3}\right)^2} \backsim 22 \frac{EJ}{n\,l^2}.$$

Die genaue Untersuchung, ausgehend von der elastischen Linie, wie bei dem excentrisch gedrückten Stab, die beeinflusst ist durch den Seitendruck Q mit dem Moment $Q(l - x)$,

soll hier, als zu weitgehend, weggelassen werden. Sie ergiebt für die Tragfähigkeit

$$P = 2{,}046\,\pi^2 \frac{E\,J}{n\,l^2} \backsim 20\,\frac{E\,J}{n\,l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (183)$$

Als fest eingeklemmt kann man durch Schrauben befestigte und durch Rippen mit der Fussplatte versteifte Säulenenden, eingerammte Pfähle, versteifte Gusswände und ähnliche Fälle ansehen. Stäbe, die an ihren Enden einfach durch Niete oder Schrauben befestigt sind, nimmt man der Sicherheit wegen als an beiden Enden gestützt an und berechnet sie also nach dem zweiten Fall. Führung des einen Endes in der Stabachse ist dann vorhanden, wenn das Ende durch Bolzen, Nietung u. a. festgehalten ist.

Nach den erhaltenen Gleichungen ist die Knickungsfestigkeit eines Stabes umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge, während bei der Druckfestigkeit, abgesehen vom Eigengewicht, die Länge ohne Einfluss ist. Während daher bei Zu- oder Abnahme der Länge die Knickungsfestigkeit rasch fällt oder steigt, bleibt die Druckfestigkeit immer dieselbe. Bei einer gewissen Länge werden beide Festigkeiten gleich gross sein und es ist also diese Länge die Grenze, unter welcher der Stab auf Druck, über welcher er auf Knickung zu berechnen ist.

Ist F der Querschnitt, l die Länge eines Stabes, bei der seine Druck- und Knickungsfestigkeit gleich gross sind, so ist die Tragkraft für Druck $P = Fk$ und für Knickung $P = \frac{5}{2}\,\frac{E\,J}{n\,l^2}$, wenn man den ersten Fall annimmt. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke folgt

$$\frac{F\,l^2}{J} = \frac{5}{2}\,\frac{E}{n\,k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (184)$$

aus welcher Gleichung für jede Querschnittsform und für jedes Material die Länge l, für welche Druck- und Knickfestigkeit gleich gross sind, oder das Verhältniss der Länge des Stabes zur Höhe des Querschnittes in der Biegungsebene zu ermitteln ist.

Für einen Stab von Schmiedeeisen und kreisförmigem Querschnitt ist z. B. mit der Annahme von $k = 700$ kg pro qcm und $n = 5$ nach Gl. 184

$$\frac{d^2\,\pi \,.\, l^2 \,.\, 64}{4 \,.\, d^4\,\pi} = \frac{5}{2}\,\frac{2\,000\,000}{5 \,.\, 700},$$

woraus

$$\frac{l}{d} = 9{,}43 \sim 10.$$

Wenn also die Länge kleiner ist als das Zehnfache des Durchmessers, so ist der Querschnitt auf Druck zu berechnen, im anderen Fall auf Knickung.

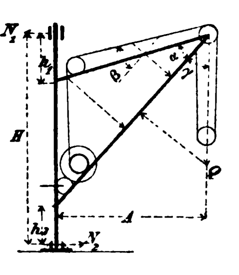
Bei den drei anderen Fällen der Knickungsfestigkeit ist die Tragfähigkeit 4, 16, 8 mal so gross als beim ersten Fall, es kann daher das Verhältniss $\frac{l}{d}$ für schmiedeeisernen Rundstab $\sqrt{4}$ $\sqrt{16}$ $\sqrt{8}$ oder 2, 4, 2,8 mal so gross sein, ehe der Stab auf Knickung zu berechnen ist.

Einfacher als durch Berechnung des Grenzverhältnisses, wird man in den Fällen, die es zweifelhaft lassen, ob die Berechnung auf Druck oder auf Knickung grösseren Querschnitt ergiebt, verfahren, durch Berechnung des Querschnittes auf beide Beanspruchungen und Beibehaltung des grösseren Resultates.

Die Voraussetzung, dass bei einer bestimmten Grenze der Länge l diese erst einen Einfluss auf die Tragfähigkeit ausübt, wird durch die Erfahrung nicht bestätigt. Streng aufgefasst, macht sich die Einwirkung der Druck- und der Biegungsbeanspruchung bei jeder Stablänge gleichzeitig geltend. Bei grosser Länge ist aber der Einfluss der Druckbeanspruchung verschwindend klein und bei kleiner Länge unter der oben erwähnten Grenze ist der Einfluss der Knickung sehr klein, so dass bei der willkürlichen Annahme vom Sicherheitsfactor n die Zuverlässigkeit der aufgestellten Gleichungen eine genügend grosse ist. In der Nähe des Grenzverhältnisses für gleiche Druck- und Knickungsfestigkeit kann man mit Rücksicht auf obiges n etwas kleiner und unterhalb des Grenzverhältnisses, in der Nähe desselben kann man bei der Berechnung auf Druck k etwas kleiner annehmen.

Die Form gleicher Knickungsfestigkeit wäre mit Rücksicht darauf zu bestimmen, dass der Querschnitt an dem einen, resp. an zwei gestützten oder geführten Enden des Stabes der einfachen Druckbelastung zu entsprechen hat. Der Querschnitt wächst nach einer gewissen Curve bis zu dem meist beanspruchten Querschnitt. Diese Curve ist die cykloidische Sinoide. Man ersetzt sie durch eine beliebige schwach gekrümmte Linie, oder dadurch, dass man den Endquerschnitt etwas grösser macht als dem einfachen Druck entsprechend, und die Begrenzung geradlinig.

Beispiel 1.



In der 5200 mm langen Strebe eines Krahnes wirkt ein Druck von 6650 kg. Das Material der Strebe soll Eichenholz, der Querschnitt soll kreisförmig sein.*)

Der Verbindung der Strebe mit der Krahnsäule und den Zugstangen durch Bolzen oder Nietung entsprechend, kann man Stützung an beiden Enden annehmen und es ist nach Gl. 181

$$P = 10 \frac{E J}{n l^2} \text{ oder } J = \frac{P n l^2}{10 E}.$$

Wegen der bei dem Krahnbetrieb auftretenden Stösse sei für n der doppelte Werth, also 20 angenommen. Mit dem Durchmesser d folgt

$$\frac{d^4 \pi}{64} = \frac{6650 \,.\, 20 \,.\, 5200^2}{10 \,.\, 1000} = 359632000 = J$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64}{\pi} J} = 2{,}13 \sqrt[4]{J} = 2{,}13 \sqrt[4]{359632000} \sim 295.$$

---

*) Nennt man die Zugkraft in der Lastkette T, die Zugkraft in den Zugstangen T_1, den Druck in der Strebe N, die Last Q und sind α, β, γ die Winkel, die die Richtungen der Lastkette, der Zugstangen und der Belastung mit der Strebe einschliessen, so lassen sich T, T_1 und Q in je zwei Componenten zerlegen, vertical zur Strebe und in dieselbe fallend. Die verticalen Componenten müssen im Gleichgewicht sein, damit ergiebt sich

$$T_1 = \frac{Q \sin \gamma - T \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Die anderen Componenten erzeugen den Druck in der Strebe, es ist also

$$N = Q \cos \gamma + T_1 \cos \alpha + T \cos \beta.$$

T ist nahe gleich $\frac{Q}{2}$.

Ist A die ganze Ausladung, H die Entfernung der beiden Zapfenmittel, G das zu schätzende Gewicht des Krahnes, x der Abstand des Krahnschwerpunktes von der Säulenachse $\sim \frac{1}{4} A$, so ist die Reactionskraft in den Drehzapfen

$$N_1 = N_2 = \frac{Q A + G x}{H}.$$

Ist h_1 der Abstand des oberen Zapfenmittels von dem Befestigungspunkt der Zugstangen und ist dieser grösser als h_2, so ist das Maximalmoment an der Säule $M = N_1 h_1$, im anderen Fall ist $M = N_2 h_2$.

Ist die Strebe von Gusseisen mit kreisringförmigem Querschnitt, so ist das Trägheitsmoment $J = \frac{\pi}{64}\left(d_a^4 - d_i^4\right)$, wenn d_a der äussere und d_i der innere Durchmesser ist.

Mit der Annahme $d_i = 0{,}6\ d_a$ ist

$$J = \frac{\pi}{64}\, d_a^4 \left(1 - 0{,}6^4\right) = \frac{\pi}{64} \,.\, 0{,}8704\ d_a^4 .$$

Bei der Annahme von $n = 15$ folgt aus $J = \frac{P n l^2}{10 \,.\, E}$ mit $E = 10000$ pro qmm:

$$d_a^4 = \frac{64}{\pi \,.\, 0{,}8704} \,.\, \frac{6650 \,.\, 15 \,.\, 5200^2}{10 \,.\, 10000} = 23{,}5 \,.\, 26972400 = 23{,}5\, J$$

$$d_a = \sqrt[4]{23{,}5\, J} = 2{,}2 \sqrt[4]{J} = 2{,}2 \sqrt[4]{26972400} \backsim 160 \text{ mm},$$

der innere Durchmesser

$$d_i = 0{,}6\ d_a = 0{,}6 \,.\, 160 = 96 \text{ mm}.$$

Der Durchmesser an den Enden der Strebe erhält ohngefähr den 0,7fachen Werth des mittleren Durchmessers.

Beispiel 2.

Die Strebe desselben Krahnes soll aus zwei nebeneinander liegenden Schienen von Schmiedeeisen mit ⊐ Profil bestehen.

Bei derartigen weniger einfachen Profilen verfährt man in der Weise, dass man aus der Gleichung für die Knickungsfestigkeit den Werth des Trägheitsmomentes J berechnet, dann ein passend scheinendes Profil schätzungsweise oder nach der Erfahrung annimmt und das Trägheitsmoment desselben berechnet, oder man entnimmt das passende Profil mit dem zugehörigen Trägheitsmoment aus einer Profiltabelle. Die beiden so erhaltenen Werthe des Trägheitsmomentes müssen angenähert übereinstimmen.

Nach Gl. 181 ist die nöthige Grösse des Trägheitsmomentes

$$J = \frac{P n l^2}{10\, E}$$

und mit $E = 20000$ und $n = 15$ folgt

$$J = \frac{6650 \,.\, 15 \,.\, 5200^2}{10 \,.\, 20000} \backsim 13450000.$$

Auf eine Schiene kommt die Hälfte davon, also 6725000. Diesem Trägheitsmoment entspricht nach einer vorliegenden Profiltabelle angenähert das Profil mit 140 mm Höhe, 60 mm Breite, 7,5 mm Stegdicke, 11 mm Flanschendicke, mit dem auf die Symmetrieaxe bezo-

genen Trägheitsmoment 6531000. Wegen der Verbindung der beiden Schienen durch Stehbolzen ist die Annahme der Biegungsebene in der Stegrichtung statthaft.

Beispiel 3.

Es soll eine Formel zur Berechnung des Kurbelstangen- oder Schubstangenquerschnittes aufgestellt werden. Als Druckkraft in der Stangenrichtung ist der Druck P auf den Kolben der Maschine anzunehmen, l sei die Länge der Stange, D der Durchmesser in der Mitte ihrer Länge.

Entsprechend der Führung der beiden Enden durch Zapfen gilt hier der zweite Fall der Knickung mit der Gleichung

$$P = 10 \frac{E J}{n l^2}.$$

Für kreisförmigen Querschnitt und für Schmiedeeisen ist $J = D^4 \frac{\pi}{64}$ und $E = 20000$ pro qmm. Mit Einsetzung dieser Werthe folgt

$$D = \sqrt[4]{\frac{n P l^2 . 64}{10.20000 \pi}} \backsim 0.1 \sqrt[4]{n P l^2}.$$

Die schwingende Stange ist ausser der Kraft P, durch die Kraft, mit der die Trägheit der Masse der schwingenden Bewegung widersteht, auf Biegung beansprucht. Man müsste also nach vorläufiger Berechnung der Stange auf Knickung controliren, ob die durch das Biegungsmoment und durch den Druck P bewirkten Druckspannungen zusammen einen zulässigen mässigen Werth nicht übersteigen; es wird dann auch die durch die Trägheitskraft bewirkte Durchbiegung, mit ihrem schädlichen Einfluss auf die Widerstandsfähigkeit gegen Knickung verschwindend klein sein.

Dieser Art der Berechnung tritt aber ein besonderer Umstand entgegen. Nach Obigem müsste der Querschnitt um so grösser werden, je grösser die Zahl der Schwingungen pro Minute ist, denn die lebendige Kraft ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit. Die Erfahrung zeigt aber, dass mit wachsender Geschwindigkeit der Stangenquerschnitt kleiner wird.

Es lässt sich dieser Umstand so erklären, dass mit wachsender Schwingungszahl, also mit wachsender Kolbengeschwindigkeit die Beanspruchung auf Biegung zwar steigt, dass aber in viel höherem Maasse mit der Verkürzung der Zeitdauer einer Schwingung, also

einer Belastungsperiode der Einfluss von P auf die der Knickung zu Grunde liegenden Formänderung kleiner wird. Ein Gesetz der Abhängigkeit dieses Einflusses von der Dauer der Belastungsperiode ist bisher noch nicht aufgestellt worden.

In der Praxis ist man zunächst bestrebt gewesen, schnell laufende Kurbelstangen leichter auszuführen, ihnen weniger Masse zu geben, um die Massenwirkung herabzuziehen. Diese Kurbelstangen haben sich gut bewährt, während anderntheils bei geringer Geschwindigkeit schwache Stangen durch bemerkbare Ausbiegungen (Zittern) sich als ungenügend erwiesen.

Durch vergleichende Rechnungen ergiebt sich, dass man bei alleiniger Anwendung der Formel für Zerknickung den Sicherheitsfactor n setzen kann:

$n \backsim 40$ bei einer Kolbengeschwindigkeit $v = 1$ m,
$n \backsim 30$ „ „ „ $v = 2$ m,
$n \backsim 20$ bis 15 „ „ „ $v = 3$ m,
$n \backsim 10$ bis 3 „ „ „ $v = 4$ m und mehr.

Die Werthe $n = 6$ bis 8 finden sich oft bei Kurbelstangen für Lokomotiven.

Setzt man diese Werthe $n = 40$, 30, 20 und 10 in die Gleichung

$$D = 0{,}1 \sqrt[4]{n P l^2},$$

so erhält man für $v = 1$ m, $n = 40$:

$$D = 0{,}25 \sqrt[4]{P l^2} = 0{,}25 \sqrt[4]{P} \sqrt{l} \text{ in mm.}$$

Für die Kolbengeschwindigkeiten $v = 2$ m, 3 m 4 m werden die Faktoren von dem Wurzelzeichen 0,23, 0,21, 0,18.

Für Kurbelstangen aus Stahl, ändert sich der constante Faktor nach dem umgekehrten Verhältniss der vierten Wurzeln aus den verschiednen Elasticitätsmoduln.

$$\text{Es ist Dschm: } Dst. = \sqrt[4]{21500} : \sqrt[4]{20000},$$

daraus

$$Dst = 0.98 \text{ Dschm.}$$

Den Durchmesser der Kurbelstange am Kreuzkopfende macht man gleich 0,7 D und den am Kurbelende 0,8 D, weil nach diesem hin die Belastung durch die lebendige Kraft der Masse anwächst.

Ist rechteckiger Stangenquerschnitt verlangt, so hat man die Bedingung: Es muss die Tragfähigkeit der rechteckigen Stange gleich der mit rundem Querschnitt sein, mithin

$$\frac{\pi^2 E J_{\bullet}}{n l^2} = \frac{\pi^2 E J_{\blacksquare}}{n l^2},$$

oder

$$J_{\bullet} = J_{\blacksquare}, \quad D^4 \frac{\pi}{64} = \frac{h b^3}{12},$$

wenn b die kleinere Rechteckseite ist.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{b^4}{D^4} = \frac{12\,\pi}{64} \frac{b}{h}$$

und daraus

$$\frac{b}{D} = \sqrt[4]{\frac{3\,\pi}{16} \frac{b}{h}}.$$

Setzt man $\frac{b^3}{D^3} = \frac{12\,\pi}{64} \frac{D}{h}$, so folgt

$$\frac{b}{D} = \sqrt[8]{\frac{3\,\pi}{16} \frac{D}{h}} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{D} = \frac{3\,\pi}{16} \frac{D^3}{b^3}.$$

Für die anzunehmenden Werthe von

$$\frac{h}{b} = 1{,}5 \quad 1{,}75 \quad 2 \quad 2{,}25 \quad 2{,}5$$

folgt hiermit

$$\frac{b}{D} = 0{,}79 \quad 0{,}76 \quad 0{,}74 \quad 0{,}72 \quad 0{,}7$$

$$\frac{h}{D} = 1{,}19 \quad 1{,}33 \quad 1{,}48 \quad 1{,}62 \quad 1{,}75.$$

Ist z. B. für eine Lokomotive der Druck auf den Kolben $P = 8000$ kg, die Länge der Kurbelstange $l = 1{,}8$ m, die Kolbengeschwindigkeit $v = 4$ m pro Secunde, so ist mit dem Sicherheitsfactor $n = 10$, für Schmiedeeisen und kreisförmigem Querschnitt

$$D = 0{,}18 \sqrt[4]{P\,l^2} = 0{,}18 \sqrt[4]{8000 \,.\, 1800^2} \backsim 72 \text{ mm}.$$

Für rechteckigen Querschnitt mit dem Verhältniss $h : b = 1{,}75$ ist nach der Tabelle

$$\frac{b}{D} = 0{,}76,$$

mithin ist

$$b = 72 \,.\, 0{,}76 \backsim 55 \text{ mm}$$

und

$$h = b \,.\, 1{,}75 = 55 \,.\, 1{,}75 \backsim 97 \text{ mm}.$$

Beispiel 4.

Es ist eine Formel zur Berechnung des **Kolbenstangendurchmessers** zu entwickeln.

Wegen der Befestigung der Stange im Kolben und Führung derselben in der Stopfbüchse des Cylinderdeckels kann das eine Ende der Stange als fest eingeklemmt angesehen werden und es ist entsprechend dem vierten Fall der Knickungsfestigkeit

$$P = 20 \frac{EJ}{n\,l^2}$$

woraus mit $J = \frac{D^4 \pi}{64}$, $E = 20000$

$$D = 0{,}084 \sqrt[4]{P n l^2} \text{ folgt.}$$

Für kleine und mittlere Kolbengeschwindigkeiten kann man $n = 25$ bis 30 setzen. Für grosse Kolbengeschwindigkeiten kleiner bis 15.

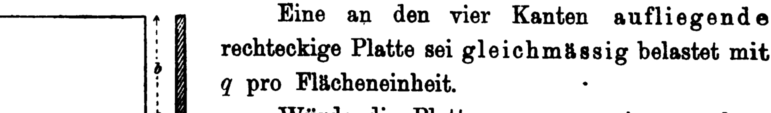
Mit $n = 25$ erhält man

$$D = 0{,}19 \sqrt[4]{P l^2} = 0{,}19 \sqrt[4]{P} \sqrt{l} \text{ in mm.}$$

Bei horizontalen Maschinen, besonders bei denen mit durchgehender Kolbenstange soll diese den Kolben tragen und es muss die Berechnung des Stangendurchmessers nach den Gleichungen 58 oder 67 mit der Annahme einer sehr kleinen zulässigen Durchbiegung geschehen. Kolbenstangen von Gussstahl erhalten denselben Durchmesser.

VIII. Abschnitt.

Berechnung ebener Platten.



Eine an den vier Kanten **aufliegende** rechteckige Platte sei **gleichmässig** belastet mit q pro Flächeneinheit.

Würde die Platte nur an zwei gegenüberliegenden Seiten aufliegen, so würde sie sich wie ein gewöhnlicher, auf Biegung beanspruchter Stab verhalten. Thatsächlich erleidet die Platte aber eine Durchbiegung längs der Richtung a und eine längs der Richtung b; es entstehen in den Rich-

tungen a und b maximale Spannungen, die beide zusammen der Belastung q entsprechen müssen.

Die Festigkeit des Materials in beiden Richtungen gleich gross vorausgesetzt, kann man die Platte aus zwei Schichten, von der Dicke δ bestehend sich denken, beide mit der Belastung $\frac{q}{2}$ pro Flächeneinheit, die eine Schicht an den Kanten a, die andere an den Kanten b aufliegend.

Für die eine Schicht ist das Biegungsmoment $\frac{q}{2}\, a\, b\, \frac{a}{8}$ (siehe Gl. 90) und nach der Gleichung $M = Wk$ ist

$$\frac{q}{2}\, a\, b\, \frac{a}{8} = \frac{b\,\delta^2}{6}\, k,$$

für die andere Schicht ist

$$\frac{q}{2}\, a\, b\, \frac{b}{8} = \frac{a\,\delta^2}{6}\, k.$$

Beide Gleichungen müssen gleichzeitig bestehen.

Durch Addition derselben erhält man

$$\frac{q}{16}\, a\, b\, (a + b) = \frac{\delta^2\, k}{6}\, (a + b),$$

oder, beide Seiten durch a^2 dividirt:

$$\frac{q}{8}\, \frac{a\, b}{a^2} = \frac{k}{3}\, \frac{\delta^2}{a^2},$$

woraus die Dicke der Platte:

$$\delta = a\sqrt{\frac{3}{8}\, \frac{q}{k}\, \frac{b}{a}} = 0{,}61\, a \sqrt{\frac{q}{k}\, \frac{b}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

Für die an den vier Seiten eingeklemmte Platte sind nach Gl. 105 die Momente $q\, a\, b\, \frac{a}{12}$ und $q\, a\, b\, \frac{b}{12}$, und man erhält in derselben Weise

$$\delta = 0{,}5\, a \sqrt{\frac{q}{k}\, \frac{b}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

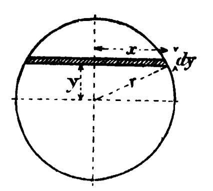
Für die quadratische Platte ist $a = b$, demnach

$$\delta = 0{,}61\, a \sqrt{\frac{q}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

für die frei aufliegende,

$$\delta = 0{,}5\, a \sqrt{\frac{q}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

für die eingeklemmte gleichmässig belastete Platte.



Die kreisrunde Platte kann man aus einzelnen Streifen bestehend annehmen, von der unendlich kleinen Breite dy. Jeder der Streifen ist in Folge der gleichmässigen Belastung Spannungen in seiner Längs- und in seiner Querrichtung ausgesetzt. Nimmt man nun immer zwei sich rechtwinklig kreuzende übereinanderliegende Streifen an, die beide Spannungen getrennt aufnehmen, so kommt auf jeden der Streifen die Belastung $\frac{q}{2}$ pro Flächeneinheit.

Die Belastung eines Streifens von der Fläche $2\,x\,dy$ ist

$$\frac{q}{2}\,2\,x\,dy\,.$$

Das Biegungsmoment ist

$$d\,M = \frac{q}{2}\,2\,x\,dy\,\frac{2\,x}{8}\,.$$

Das Widerstandsmoment ist, mit δ als Plattendicke

$$d\,W = \frac{1}{6}\,dy\,\delta^2.$$

Das Moment über der ganzen Kreisfläche ist

$$M = \int \frac{q}{2}\,2\,x\,dy\,\frac{2\,x}{8} = \frac{q}{4}\int x^2\,dy.$$

Es ist aber $x^2 = r^2 - y^2$, und die Grenzen für die Integration sind $-r$ und $+r$, demnach ist

$$M = \frac{q}{4}\int_{-r}^{+r}(r^2 - y^2)\,dy = \frac{q}{4}\left[r^2 y - \frac{1}{3}\,y^3\right]_{-r}^{+r}$$

$$= \frac{q}{4}\left(r^3 - \frac{1}{3}\,r^3 + r^3 - \frac{1}{3}\,r^3\right) = \frac{1}{3}\,q\,r^3.$$

Das Widerstandsmoment der ganzen Kreisfläche ist

$$W = \int d\,W = \int_{-r}^{+r}\frac{1}{6}\,\delta^2\,dy = \frac{1}{6}\,2\,r\,\delta^2 = \frac{1}{3}\,r\,\delta^2.$$

Nach der Gl. $M = Wk$ folgt hiermit

$$\frac{1}{3}\,q\,r^3 = \frac{1}{3}\,r\,\delta^2 k.$$

Für die zu den ersteren rechtwinklig liegenden Streifen vertauschen sich die Coordinaten x und y, das Resultat ist aber dasselbe und es folgt hiermit die Dicke der Platte, wenn diese ringsum aufliegt, mit $r = 2\,d$:

$$\delta = r \sqrt{\frac{q}{k}} = 0{,}5\, d \sqrt{\frac{q}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

Für die ringsum eingeklemmte Platte erhält man in derselben Weise mit $d M = \frac{q}{2}\, 2\, x\, d y\, \frac{2 x}{12}$:

$$\delta = 0{,}4\, d \sqrt{\frac{q}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (190)$$

Die Herleitung der Formeln kann keinen Anspruch auf wissenschaftliche Schärfe machen. Die Formeln stimmen aber nahe mit den von Grashof strenger hergeleiteten überein.

Platten von Gusseisen werden meist durch Rippen, und Platten von Schmiedeeisen werden durch Anker oder Stehbolzen versteift. Die aus obigen Formeln, mit den auf Seite 4 und 5 angegebenen Werthen für k, resultirenden verhältnissmässig grossen Plattendicken lassen sich dann leicht durch Anwendung der erwähnten Versteifungen auf die in der Praxis üblichen Plattendicken reduciren.

Beispiel 1.

Ein Schieberkastendeckel von Gusseisen, 400 mm lang, 300 mm breit, ist dem Druck von 6 Atmosphären oder 6 kg pro qcm im Schieberkasten ausgesetzt.

Die durch Schrauben festgehaltenen starken Flanschen kann man als eingeklemmt annehmen. Mit $k = 400$ kg pro qcm folgt nach Gl. 188

$$\delta = 0{,}5 \,.\, 40 \sqrt{\frac{6}{400} \cdot \frac{30}{40}} \sim 2{,}1 \text{ cm} = 21 \text{ mm}.$$

Durch Anbringung von drei oder vier rechtwinklig sich schneidenden, circa 18 mm dicken und 45 mm hohen Rippen, kann die Plattendicke ohne Bedenken auf die übliche Grösse von 16 bis 18 mm reducirt werden.

Beispiel 2.

Der Deckel eines Dampfcylinders hat einen Schraubenlochkreisdurchmesser von 400 mm. Der grösste Druck im Cylinder beträgt 5 kg pro qcm. Wie gross ist die Dicke des gusseisernen Deckels?

Der fortwährend wechselnden Spannungen wegen sei $k = 300$ kg pro qcm angenommen, dann ist nach Gl. 190

$$\delta = 0{,}4 \,.\, 40 \sqrt{\frac{5}{300}} \sim 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}.$$

Bei kräftiger Versteifung wäre hier, schon der Kolbenstangenbohrung wegen, nur sehr geringe Verkleinerung der Dicke rathsam.

Beispiel 3.

Der Druck in einem Dampfkessel von 1000 mm Durchmesser beträgt 4 Atmosphären. Die Dicke der Stirnwand ergiebt sich mit $k = 900$ kg, wenn man die Stirnwand als eingeklemmt annimmt:

$$\delta = 0{,}4\, d \sqrt{\frac{q}{k}} = 0{,}4 \,.\, 100 \sqrt{\frac{4}{900}} \sim 2{,}6 \text{ cm} = 26 \text{ mm.}$$

Nur durch starke Verankerung ist es möglich, die Blechdicke auf 13 bis 14 mm zu reduciren.

Was die Berechnung der Wandstärken von röhrenförmigen Körpern betrifft, so muss auf die Formeln von Mariotte, Grashof, Brix u. a., die zum Theil empirisch sind, verwiesen werden.

DRUCK VON EMIL HERRMANN SEN., LEIPZIG.

